

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет
имени И. Т. Трубилина»

М. А. Бандурин, П. Г. Пасниченко

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебник

Краснодар
КубГАУ
2022

УДК 539.3(075.8)

ББК 38.112

Б23

Р е ц е н з е н т ы :

Е. В. Кузнецов – зав. кафедрой гидравлики
и с.-х. водоснабжения Кубанского государственного
аграрного университета, д-р техн. наук, профессор;

В. Л. Бондаренко – профессор кафедры техносферной
безопасности и природообустройства НИМИ Донского
государственного аграрного университета, д-р техн. наук, профессор;

Н. А. Анискин – директор института гидротехнического
и энергетического строительства (Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет),
д-р техн. наук, профессор

Бандурин М. А.

Б23 Прикладная механика : учебник / М. А. Бандурин,
П. Г. Пасниченко. – Краснодар : КубГАУ, 2022. – 181 с.

ISBN 978-5-907598-88-1

В учебнике представлен теоретический материал по основным разделам прикладной механики. Рассмотрены методы расчета схем и параметров элементов оборудования, режимы работы объектов профессиональной деятельности и вопросы контроля регулирования параметров технологического оборудования. Приводятся современные подходы к расчету и проектированию сложных систем, классификация элементов рационального проектирования конструкций.

Предназначен для обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника.

УДК 539.3(075.8)

ББК 38.112

© Бандурин М. А.,
Пасниченко П. Г., 2022
© ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный аграрный
университет имени
И. Т. Трубиллина», 2022

ISBN 978-5-907598-88-1

ВВЕДЕНИЕ

Уровнем развития науки и техники, а также достижениями современной практики обусловлена необходимость комплексного решения задач, связанных с обеспечением базы инженерной теоретической и практической подготовки специалиста в области прикладной механики деформируемого тела. В результате у обучающихся формируется инженерное мышление, приобретаются дополнительные знания в области электротехники.

Для успешного решения обозначенных проблем будущим инженерам необходимо освоить теоретический материал по ключевым разделам прикладной механики, основы расчетов сложных систем и конструкции с учетом системного подхода к организации процесса обучения.

В учебнике рассмотрены теоретические положения и практические методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и сложных машин. Материал учебника предусматривает ознакомление с современными подходами к расчету сложных систем, элементов рационального проектирования конструкций, а также получение навыков работы с основными измерительными инструментами и испытательными машинами.

В процессе изучения теоретических положений учебника обучающиеся смогут составить технико-экономическое обоснование проектных расчетов, а также схем и параметров элементов оборудования. Полученные знания необходимы как при изучении технических дисциплин, так и в практической деятельности.

Принципиальным отличием содержательной стороны учебника является то, что составленный по основным разделам курса он отражает теоретическую и практическую составляющие дисциплины «Прикладная механика». Это позволит специалистам в области электроэнергетики и электротехники приобрести практические навыки применения классических методов расчета инженерных задач, используемых в изучении технических дисциплин.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ

1.1 Основные определения

Прикладная механика является частью более общей науки – механики твердого деформируемого тела, в которую входят: теория упругости, теории пластичности и ползучести, теория сооружений, строительная механика, механика разрушения и др.

Задача науки о сопротивлении материалов – изучение методов расчета элементов конструкций и деталей машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочностью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, не разрушаясь.

Жесткостью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, получая малые упругие деформации.

Устойчивостью называется способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием приложенных сил.

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных к ним сил изменяют свою первоначальную форму и размеры, то есть **деформируются**. Исчезающие после снятия внешних сил деформации тела называются **упругими**, а не исчезающие – **остаточными или пластическими деформациями**.

Целью расчета на прочность является определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключена возможность разрушения деталей.

Подбор размеров деталей или установление внешних нагрузок, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции деформаций этих деталей, является целью расчета на жесткость.

1.2 Реальный объект и расчетная схема

Реальные материалы характеризуются разнообразными физическими свойствами и специфической для каждого из них структурой. С целью упрощения расчетов в сопротивлении материалов используют следующие допущения относительно их свойств:

– **однородность**, то есть равнозначительность их свойств во всех точках;

– **изотропность**, то есть тождественность их свойств.

Изотропными считаются аморфные материалы, такие как стекло и смолы: анизотропными – пластмассы, текстолит и т. п. Металлы оказываются поликристаллическими телами, состоящими из большого количества зерен, размеры которых очень малы (порядка 0,01 мм). Каждое зерно является анизотропным, но вследствие малых размеров зерен и беспорядочного их расположения металлы проявляют свойство изотропии.

Материал обладает свойством **идеальной упругости**, т. е. деформируемое тело полностью восстанавливает свою форму и размеры после исключения нагрузки независимо от величин нагрузок и температуры тела.

Форма и размеры упругого тела изменяются прямо пропорционально возрастанию нагрузок, то есть по известному **закону Гука** (1660 г.).

В формулировке допущений границы применения закона пропорциональности Гука не оговариваются, хотя при некоторых нагрузках происходит существенное отклонение от закона пропорциональности.

Материал обладает свойством **сплошности**, то есть способностью без пустот заполнять пространство, ограниченное поверхностью тела. Вследствие этого материал считается непрерывным, что позволяет использовать для определения напряжений и деформаций математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

Упругие тела являются относительно жесткими, благодаря чему перемещения точек тела весьма малы по сравнению с размерами самого тела. Эта гипотеза служит основанием для **принципа начальных размеров**.

Схематизация геометрии объекта в сопротивлении материалов сводится к рассмотрению бруса, пластины, оболочки и массива.

Брусом называют тело, у которого один из параметров (длина) многократно превышает два остальных (ширину и высоту) (рисунок 1.1).

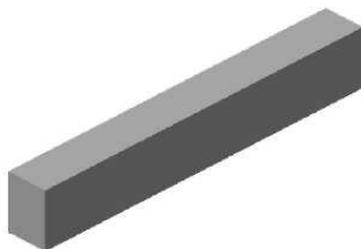


Рисунок 1.1 – Схема бруса

Пластиной называют тело, один из характерных размеров которого (толщина) мал по сравнению с двумя другими характерными размерами (рисунок 1.2).

Согласно закону Гука (1660 г.) форма и размеры упругого тела зависят от изменения нагрузок.

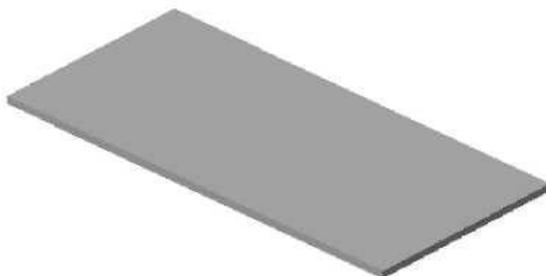


Рисунок 1.2 – Схема пластины

Оболочка – искривленная пластина (криволинейная до нагружения) (рисунок 1.3).

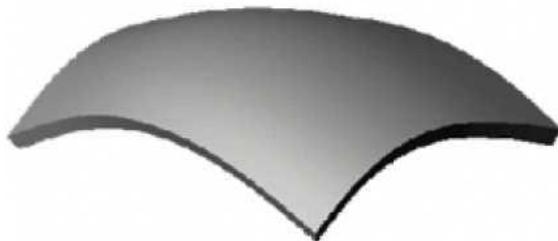


Рисунок 1.3 – Схема оболочки

Массив – тело, имеющее размеры, соизмеримые в трех направлениях (рисунок 1.4).

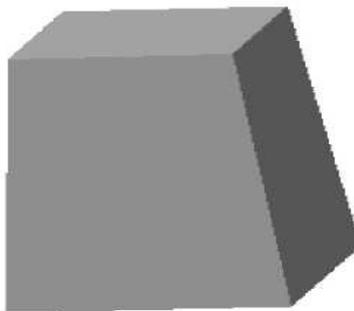


Рисунок 1.4 – Схема массива

Пространственное твердое тело имеет шесть степеней свободы перемещений – три поступательных и вращательных движения вокруг трех взаимно перпендикулярных осей. Плоское тело имеет только три степени свободы — два поступательных движения в направлении двух осей и вращение вокруг третьей оси. Опорные устройства препятствуют тем или иным из указанных перемещений тела или вообще исключают всякое его движение. Опорные устройства классифицируют по числу связей, накладываемых на перемещения опорных

точек (узлов) тела. Связь обычно представляют в виде стержня, соединяющего тело с опорной поверхностью. Если отсутствует специальное указание, то опорные связи и поверхности считаются абсолютно жесткими.

При нагружении тела на него со стороны опорных связей начинают действовать силы, называемые опорными реакциями. Они определяются из уравнений равновесия тела, у которого опорные связи мысленно удалены и заменены силами, направленными вдоль снятых связей.

Для плоского тела, в частности для плоского бруса, основными видами опор являются *шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная и защемляющая неподвижная*.

Шарнирно-подвижная, или *катковая* опора исключает перемещение опорного узла A в направлении, перпендикулярном опорной поверхности, но не препятствует вращению тела вокруг опорной точки и поступательному перемещению параллельно опорной поверхности. Такой опоре соответствует одна опорная реакция, направленная перпендикулярно опорной поверхности.

1.3 Гипотезы о свойствах материала

При схематизации системы внешних сил пользуются *принципом Сен-Венана*: если совокупность некоторых сил, приложенных к небольшой части поверхности тела, заменить статически эквивалентной системой других сил, то это не вызовет существенных изменений в условиях нагружения частей тела, достаточно удаленных от мест приложения исходной системы сил.

Принятие этого принципа предусматривает рассматривать только те части тела, которые достаточно удалены от места приложения нагрузки. Расчет деталей в местах их контакта занимают в рамках изучения дисциплины – *математической теории упругости*. На рисунке 1.5 представлен результат применения принципа *Сен-Венана* на практике.

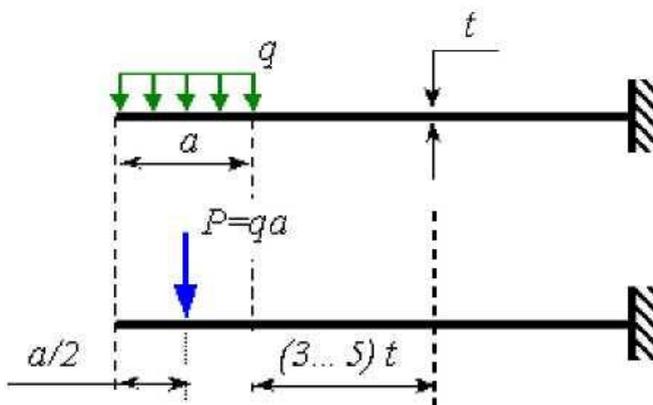


Рисунок 1.5 – К определению принципа Сен-Венана

Согласно рисунку 1.5 замена распределенной нагрузки статически эквивалентной сосредоточенной силой не окажет существенного влияния на условия нагружения части бруса, удаленной на расстояние не менее $(3-5)t$ от правой границы действия распределенной нагрузки, где t – наибольший размер поперечного сечения бруса.

Принцип независимости действия сил. При воздействии на относительно жесткое тело нескольких сил результат не зависит от приложения одной из них.

Следствие 1. Результат действия на тело нескольких сил равен сумме приложения каждой из них.

Следствие 2. Результат действия на тело нескольких сил не зависит от последовательности их приложения.

Принцип начальных размеров. При составлении условий равновесия реального тела оно может считаться не деформируемым.

В действительности при нагружении форма и размеры тела изменяются, поэтому точки приложения сил и линии их действия тоже трансформируются, что несущественно отражается на четвертом-пятом знаках численного результата.

Гипотеза о сплошности материала. Предполагается, что материал полностью занимает объем тела. Атомистическое строение вещества не учитывается.

Гипотеза о однородности и изотропности материала. Предполагается, что свойства материалов во всех точках и направлениях одинаковы. Практика показывает, что эту гипотезу можно применять даже к таким, неоднородным материалам, как бетон. Известные материалы, к которым свойство изотропии не подходит, например древесина. Ее свойства, в зависимости от расположения вдоль волокон и поперек существенно отличаются. Так неприменима эта гипотеза ко многим композитным материалам.

Гипотеза плоских сечений. До деформации и после они остаются плоскими.

Эта гипотеза имеет ограничения в применении, не выполняется при деформации стержней с тонкостенными сечениями.

1.4 Внутренние силы. Нормальное и касательное напряжения

Нагрузки, приложенные к одной какой-нибудь части тела, от точки к точке передаются остальным частям тела. Силы взаимодействия частей, вызванные нагрузками, называются внутренними. В первую очередь, из-за простоты, изучают внутренние силы, распределенные по плоским сечениям тела. При этом используют метод сечений, заключающийся в следующем. Пусть на тело действует уравновешенная система сил (рисунок 1.6).

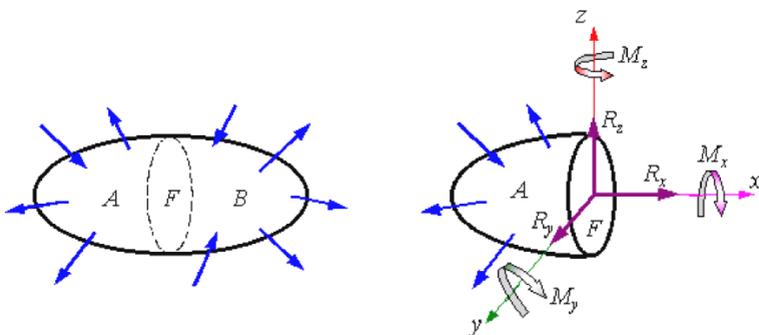


Рисунок 1.6 – К определению метода сечений

Через это тело мысленно проводим плоское сечение F , которое делит тело на части A и B . В каждом сечении будут действовать внутренние силы, характеризующие взаимодействие частей A и B тела. Отбросим одну часть тела, например B , и заменим ее действие на оставшуюся часть силами, распределенными по сечению F . Обнажая эту поверхность, переводят внутренние силы в разряд внешних, благодаря чему появляется возможность использования положений статики твердого тела. Пользуясь этим, приводят внутренние силы, распределенные по сечению к главным вектору и моменту в центре тяжести сечения. Их можно разложить на компоненты вдоль осей координат. Следовательно, в общем случае внутренние силы могут иметь шесть компонентов – $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$. Величина компонентов внутренних сил может быть найдена из **шести условий равновесия** оставленной части тела:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \quad \sum M_x = 0, \\ \sum Y &= 0, \quad \sum M_y = 0, \\ \sum Z &= 0, \quad \sum M_z = 0. \end{aligned}$$

При определении составляющих внутренних сил могут возникать как статически определимые, так и статически неопределимые задачи. В статически неопределимых задачах в дополнение к условиям равновесия составляют условия совместности деформаций сторон сечения F (при совмещении деформированные поверхности сечения F должны совпадать).

В процессе удовлетворения уравнениям равновесия и условиям совместности деформаций между компонентами внутренних сил и внешними силами устанавливается функциональная зависимость. В ней отражены форма и размеры тела, расположение сечения F , направление и место приложения нагрузочных сил, механические свойства материала.

Каждой компоненте внутренних сил соответствует вид деформации:

R_x – растяжение или сжатие;

R_y и R_z – сдвиг в направлении осей y и z ;

M_x – кручение;

M_y и M_z – изгиб относительно осей y и z .

Каждая компонента характеризует сопротивление тела какому-нибудь одному виду деформации. При наличии только какой-нибудь одной компоненты внутренних сил имеет место простое сопротивление тела. Для двух компонентов и более возникает сложное сопротивление тела.

1.5 Внутренние силовые факторы в поперечном сечении стержня и соответствующие им виды деформаций

Мерой интенсивности внутренних сил, распределенных по сечениям, служат напряжения – усилия, приходящиеся на единицу площади сечения. Выделяют в окрестности точки B малую площадку ΔF (рисунок 1.7). Пусть ΔR – равнодействующая внутренних сил, действующих на эту площадку.

Тогда среднее значение внутренних сил, приходящихся на единицу площади ΔF рассматриваемого сечения, будет равно:

$$P_m = \frac{\Delta R}{\Delta F}. \quad (1.1)$$

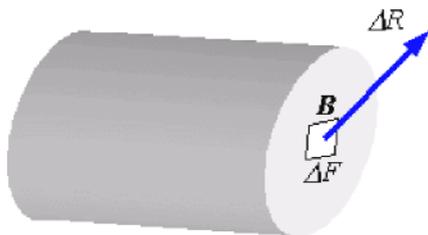


Рисунок 1.7 – Среднее значение напряжения в сечении тела

Величина P_m называется **средним напряжением**. Она характеризует среднюю интенсивность внутренних сил. Уменьшая размеры площади, в пределе получают:

$$P = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}. \quad (1.2)$$

Величина P называется истинным напряжением (или просто **напряжением**) в указанной точке рассмотренного сечения.

Единица напряжения – паскаль; $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Так как реальные значения напряжений будут выражены очень большими числами, то следует применять кратные значения единиц, например МПа (мегапаскаль);

$$1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2 = 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

Напряжения, как и силы, являются векторными величинами. В каждой точке сечения тела **полное напряжение** P можно разложить на две составляющие (рисунок 1.8):

– нормальную к плоскости сечения, **нормальное напряжение** обозначается σ ;

– лежащую в плоскости сечения, обозначается τ и называется **касательным напряжением**. В зависимости от действующих сил оно может иметь любое направление в плоскости сечения. Для удобства τ представляют в виде двух составляющих по направлению координатных осей. Принятые обозначения напряжений показаны на рисунке 1.8.

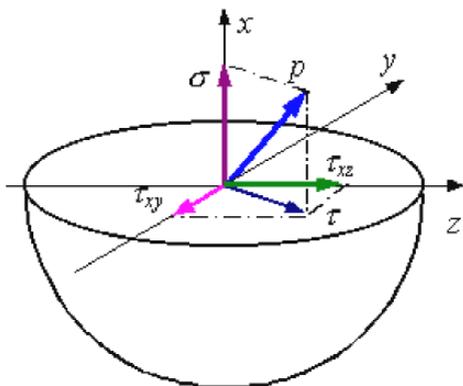


Рисунок 1.8 – Разложение вектора полного напряжения

У нормального напряжения ставится индекс, указывающий, какой координатной оси параллельно это напряжение. **Растягивающее нормальное напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным**. Обозначения касательных напряжений имеют два индекса: первый из них указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия напряжения, а второй – какой оси параллельно само напряжение. Разложение полного напряжения на нормальное

и касательное имеет определенный физический смысл. Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости сечения.

Если мысленно вокруг какой-нибудь точки тела вырезать элемент в виде бесконечно малого куба, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рисунке 1.9. Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через какую-либо точку тела, называется напряженным состоянием в этой точке.

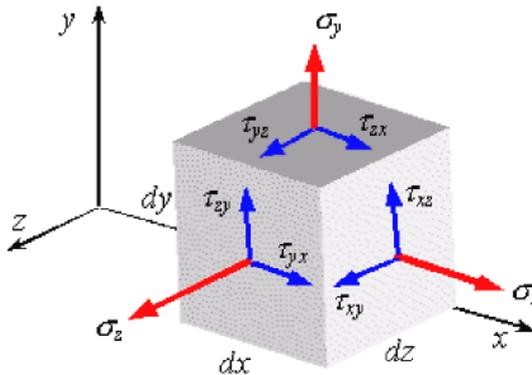


Рисунок 1.9 – Система напряжений в точке

Вычисляют сумму моментов всех элементарных сил, действующих на элемент, относительно координатных осей. Например, для оси x с учетом равновесия элемента:

$$\sum M_x = 0, \tau_{xy} \cdot dx dy dz - \tau_{yz} dx dz dy = 0. \quad (1.3)$$

Повторяя указанные действия для других осей, получают **закон парности касательных напряжений**:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.4)$$

Его можно сформулировать следующим образом: составляющие касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру, равны по величине и противоположны по знаку, то есть обе направлены либо к ребру, либо от него.

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются силы внешние и внутренние?
2. Приведите определение сосредоточенных и распределенных нагрузок.
3. Что такое силы постоянные и временные?
4. Сформулируйте определение статических и динамических нагрузок.
5. Что такое деформация?
6. Что такое малые и большие деформации?
7. Что такое простые и сложные деформации?
8. Перечислите основные гипотезы и допущения, положенные в основу курса сопротивления материалов.
9. В чем заключается принцип независимости действия сил?
10. В чем заключается метод сечений?
11. Что такое напряжение в деформируемом теле?
12. Приведите понятия напряжений: нормального, касательного и полного.
13. Перечислите виды нагружений по внутренним силовым факторам.
14. Что такое деформация?
15. В чем состоит отличие упругих и пластических деформаций?
16. Что такое малые и большие деформации?
17. Перечислите простые деформации.
18. Что называют прочностью, жесткостью, устойчивостью детали?
19. Что такое расчетная схема объекта?
20. Укажите геометрические признаки стержня, оболочки и массивного тела.

21. Какой брус называется призматическим?
22. Изложите основные требования при проектировании машин и сооружений?
23. Какие силы в сопротивлении материалов считают внешними? Какие силы являются внутренними?
24. Что называют внутренними усилиями?
25. Как определяют внутренние усилия?
26. Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий?
27. Являются ли реакции опор внутренними усилиями?
28. Возникают ли внутренние силы в ненагруженном теле? в недеформированном теле?
29. Почему обе отсеченные части, на которые разделено тело некоторым произвольным сечением, равноценны с точки зрения определения внутренних сил, действующих в этом сечении?
30. От чего зависят знаки внутренних силовых факторов: от характера их действия на отсеченную часть или от направления координатных осей?
31. Какая особая точка в сечении принимается за центр приведения внутренних сил?
32. Какую из отсеченных частей более целесообразно рассматривать в равновесии?
33. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса в случае действия на него плоской системы сил?
34. Как вычисляются продольная и поперечная силы в сечении?

ГЛАВА 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

2.1 Внутренние силовые факторы в стержне при центральном растяжении (сжатии)

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения бруса, при котором из шести составляющих главных вектора и момента внутренних сил от нуля отличается только продольная сила.

Рассмотрен случай осевого (центрального) растяжения или сжатия, когда внешние силы действуют по оси стержня (рисунок 2.1). Для определения внутренних усилий (продольных сил) применим *метод сечений*. Проводят какое-нибудь сечение, например $b - b$, и рассмотрено равновесие нижней отсеченной части. Воздействие верхней отброшенной части на нижнюю заменяют продольной силой и предварительно направляют ее от сечения, т. е. предположительно, сила является растягивающей. Составляют уравнение равновесия. Проецируя все силы, действующие на нижнюю часть бруса, по направлению параллельному оси стержня, и, приравнивая сумму проекций нулю, получают

$$N_1 - 5P = 0,$$

откуда

$$N_1 = 5P.$$

Аналогично находят продольную силу в сечении $a - a$:

$$N_2 + 8P - 5P = 0; N_2 = -3P.$$

Знак «-» показывает, что направление силы N_2 следует изменить на обратное, т. е. продольная сила будет в этом случае не растягивающей, согласно предположению, а сжимающей.

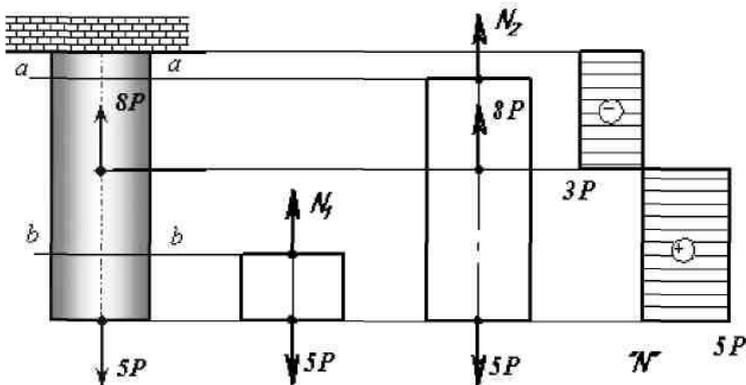


Рисунок 2.1 – Эпюра продольных усилий

Считают, продольную силу, соответствующую растяжению, положительной. Наглядно представить закон изменения продольных сил по длине стержня можно с помощью графика (эпюра продольных сил), ось абсцисс которого проводят параллельно оси стержня, а ось ординат – ей перпендикулярна. По оси ординат в выбранном масштабе откладывают значения продольных сил (с учетом знаков) в поперечных сечениях стержня. Для рассмотренного случая эпюра N представлена на рисунке 2.1.

2.2 Нормальная сила, дифференциальная ее зависимость от внешней нагрузки, нормальные напряжения в поперечных сечениях

Если на поверхность *призматического стержня* нанести сетку линий, параллельных и перпендикулярных оси стержня, и приложить к нему растягивающую силу, то можно убедиться в том, что линии сетки и после деформации останутся взаимно перпендикулярными, но расстояния между ними изменятся. Исключение составляет небольшой участок стержня вблизи точки приложения силы, который из рассмотрения пока исключают. Все горизонтальные линии, например cd ,

переместятся вниз, оставаясь, горизонтальными и прямыми. Можно предположить, что внутри стержня будет наблюдаться такая же картина, т. е. поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его оси до деформации, останутся плоскими и нормальными к оси и после. Эту важную закономерность называют *гипотезой плоских сечений (или гипотезой Бернулли)*. Формулы, полученные на основе этой гипотезы, подтверждаются результатами опытов.

Такая картина деформаций позволяет считать, что в поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению, а касательные напряжения равны нулю.

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (2.1)$$

Поскольку $\sigma = const$, из формулы (2.1) получим:

$$N = \sigma \cdot F, \quad (2.2)$$

откуда:

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2.3)$$

В частном случае, когда на стержень действует одна внешняя сила P , из уравнения равновесия получают $N = P$. Эти формулы (2.1) – (2.3) справедливы и для сжатия, с той только разницей, что сжимающие напряжения считаются отрицательными.

2.3 Закон Гука при одноосном растяжении (сжатии)

Опыты показывают:

- при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии наоборот;
- при нагружении до определенных пределов для многих

материалов существует следующая зависимость между относительным удлинением стержня ε и напряжением σ :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon = \Delta l/l$ – относительное удлинение стержня;

$\Delta l = l_1 - l_0$ – абсолютное удлинение стержня;

l_0 – длина образца до деформации;

l_1 – длина образца после деформации.

Эта зависимость называется **законом Гука** и формулируется следующим образом: линейные деформации прямо пропорциональны нормальным напряжениям.

В формуле (2.4) E – коэффициент, зависящий от материала и называемый **модулем продольной упругости (или модулем упругости первого рода)**, а также **модулем Юнга**. Он характеризует жесткость материала, т. е. его способность сопротивляться деформированию. Поскольку ε – безразмерная величина, то согласно формуле (2.4) размерность E такая же, как и σ , т. е. Паскаль (Па). Средние значения модуля продольной упругости E для некоторых материалов: сталь ($2 \cdot 10^5 \dots 2,2 \cdot 10^5$); медь ($1 \cdot 10^5$); дерево ($1 \cdot 10^4$); алюминий ($0,675 \cdot 10^5$); чугун ($0,75 \cdot 10^5 \dots 1,6 \cdot 10^5$); стеклопластики ($0,18 \cdot 10^5 \dots 4,4 \cdot 10^5$).

Для других материалов значение E можно найти в справочниках. Имея в виду, что для стержня постоянного сечения $\varepsilon = \Delta l/l$, а $\sigma = N/F$, из формулы (2.4) можно получить выражение для определения полного (абсолютного) удлинения (укорочения) стержня

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}. \quad (2.5)$$

Между продольной ε и поперечной ε' деформациями существует установленная экспериментально зависимость:

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon. \quad (2.6)$$

Здесь μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона), характеризующий способность материала к поперечным деформациям. При использовании приведенной формулы (2.6) удлинение считается положительным, укорочение – отрицательным. Значение модуля продольной упругости μ для всех материалов колеблется в пределах $0 < \mu < 0,5$, а для большинства материалов – от 0,25 до 0,35.

Значения модуля продольной упругости для разных материалов: сталь (0,25–0,33); медь (0,31–0,34); бронза (0,32–0,35); чугун (0,23–0,27); стекло (0,25); бетон (0,08–0,18); пробка (0,00); целлулоид (0,39); свинец (0,45); латунь (0,32–0,42); алюминий (0,32–0,36); цинк (0,21); камень (0,16–0,34); каучук (0,47); фанера (0,07).

Для стали при упругих деформациях можно принимать $\mu = 0,3$. Зная ε' , можно определить полное поперечное сужение или расширение стержня Δb :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}, \quad \Delta b = b - b_1,$$

где b – первоначальный поперечный размер стержня;

b_1 – поперечный размер стержня после деформации.

2.4 Потенциальная энергия деформации

Внешние силы в процессе деформации тела производят работу. Часть затраченной при этом энергии поглощается телом и накапливается в нем в виде потенциальной энергии, называемой потенциальной энергией деформации. Остальная часть расходуется на необратимые процессы – нагрев тела, изменение его электромагнитных свойств и т. д. Соотношение между этими двумя слагаемыми энергии внешних сил изменяется в процессе нагружения тела.

В пределах упругих деформаций затрата энергии на необратимые процессы незначительна, поэтому можно считать, что в пределах упругости работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации. Таким образом, упругое тело является как бы аккумулятором энергии.

За пределами упругости большая часть работы внешних сил затрачивается на необратимые процессы, а при разгрузке выделяется часть энергии, связанная с упругими деформациями тела.

При разгрузке идеально упругого тела накопленная в нем потенциальная энергия полностью расходуется на восстановление его первоначальной формы и размеров, причем эту работу производят внутренние силы. Следовательно, потенциальная энергия деформации равна работе внутренних сил упругости на перемещениях точек их приложения, и поэтому всегда может быть выражена через эти силы. Удельную потенциальную энергию деформации в общем случае объемного напряженного состояния можно определить с помощью формулы (частный случай линейного растяжения):

$$u = \frac{1}{2E} \cdot \sigma_x^2; \sigma_x = \frac{N(x)}{F(x)}; u = \frac{dU}{dV}. \quad (2.7)$$

Потенциальную энергию деформации U определяют из

уравнения (2.8) путем интегрирования по объему:

$$U = \int_V u dV = \int_l \frac{N^2(x)}{2EF^2(x)} dx \cdot \int_F dF = \int_l \frac{N^2(x) \cdot F(x)}{2EF^2(x)} dx = \int_l \frac{N^2(x)}{2EF(x)}. \quad (2.8)$$

Например, в брусе постоянного сечения при действии постоянной по длине силы P :

$$U = \frac{P^2 l}{2EF}. \quad (2.9)$$

Теоретически и экспериментально установлено, что напряжения при растяжении или сжатии стержня распределяются равномерно в поперечных сечениях только в том случае, если отсутствуют резкие колебания поперечных размеров во всей его длине. Значения площади поперечного сечения может резко изменяться вследствие наличия поперечных отверстий, канавок, надрезов, что приводит к неравномерному распределению напряжений, т. е. к их концентрации.

В непосредственной близости от концентратора напряжения достигают максимального значения, имеют локальный характер, поэтому их принято называть местными.

Если сечение ослаблено концентратором, то в нем среднее, или номинальное, напряжение:

$$\sigma_i = \frac{N}{F_{\min}}, \quad (2.10)$$

где F_{\min} – площадь ослабленного сечения, или площадью нетто.

Если площадь отверстия не учитывается, то площадь сечения называют площадью брутто, и номинальное напряжение определяется по выражению

$$\sigma_i = \frac{N}{F}. \quad (2.11)$$

Разница в номинальных напряжениях, вычисленных по формулам (2.10), (2.11), в одних случаях бывает незначительной, в других – существенной. Это зависит от характера концентратора.

Количественной характеристикой концентрации напряжений является коэффициент концентрации α , равный отношению наибольшего местного напряжения σ_{\max} к номинальному σ_i :

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_i}. \quad (2.12)$$

По выражению (2.12) находят теоретический коэффициент концентрации напряжений. Его значения колеблются от 1,1 до 3 и зависят от характера концентратора. Если это острый надрез или V-образная выточка, то $\alpha = 3$, а для перехода в виде галтели он может быть равным 1,1.

Эффективный, или опытный, коэффициент концентрации напряжений находят как отношение предельной нагрузки образца без концентратора к предельной нагрузке такого же образца с концентратором напряжений:

$$\alpha_y = \frac{P_1}{P_2}, \quad (2.13)$$

где P_1 – разрушающая нагрузка без концентратора;

P_2 – разрушающая нагрузка образца с концентратором напряжений.

Этот коэффициент зависит не только от вида концентратора, но и от свойств материала.

Концентраторы напряжений оказывают разное влияние на хрупкие и пластичные материалы. Если изготовить пластинку с отверстием из пластичного материала, например СтЗ, и подвергнуть ее растяжению, то при достижении максимальными напряжениями предела текучести σ_T волокна в зоне отверстия вытянутся и в работу вступят расположенные рядом. Пластинка изменит размеры только тогда, когда все волокна в опасном сечении нагружатся до предела текучести.

Если изготовить пластинку из хрупкого материала, например чугуна марки Сч32–18, то при достижении максимальными напряжениями предела прочности σ_B (у хрупких материалов отсутствует предел текучести) происходит спонтанное (лавинообразное) разрушение пластинки. Таким образом, для пластичных материалов концентраторы напряжений опасны в меньшей степени, в отличие от хрупких материалов, и при проектировании деталей нужно их избегать.

2.5 Статически определяемые и неопределяемые задачи на растяжение (сжатие)

Задачи, в которых все реакции связей определяются из условий равновесия, называются статически определяемыми. Если число неизвестных реакций связей превышает число уравнений равновесия, задача становится **статически неопределяемой**. Степенью статической неопределяемости называется разность между числом искомых неизвестных усилий и независимых уравнений равновесия, которые для этой системы можно составить. Для решения статически неопределяемых задач к уравнениям равновесия добавляют **условия совместности деформаций**, являющиеся уравнениями, связывающими между собой деформации или перемещения отдельных частей тела.

Некоторые примеры статически неопределимых систем приведены на рисунке 2.2.

Брус, изображенный на рисунке 2.2 а, жестко заделан обоими концами; в заделках возникают реакции, направленные вдоль оси бруса. Таким образом, на брус действует система сил, направленных по одной прямой; статика в этом случае обеспечивает одно уравнение равновесия, неизвестных сил две.

Для балки, подвешенной на трех параллельных стержнях (рисунок 2.2 б), можно составить два уравнения равновесия, которых, конечно, недостаточно для определения сил в стержнях. Эти две конструкции относятся к категории **один раз статически неопределимых систем** – число неизвестных на единицу больше числа уравнений статики.

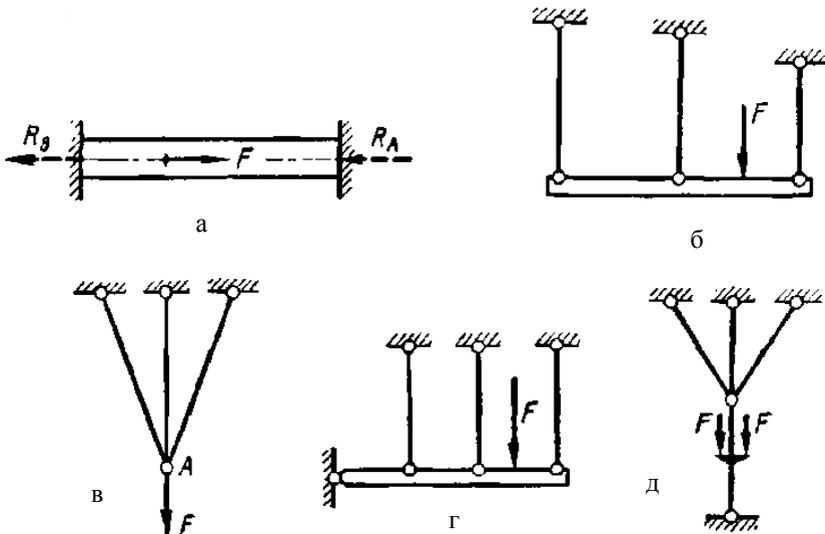


Рисунок 2.2 – Схемы статически неопределимых систем:

а – брус жестко заделан обоими концами; б – балка, подвешенная на трех параллельных стержнях; в – один раз статически неопределимая система; г, д – дважды статически неопределимые системы

Один раз статически неопределимая система представлена на рисунке 2.2 в. Вырезая узел *A*, можно составить для него два уравнения равновесия (плоская система сходящихся сил), а неизвестных сил в стержнях три. Примеры дважды статически неопределимых систем представлены на рисунках 2.2 г, д.

2.6 Экспериментальное определение механических характеристик материалов при центральном растяжении (сжатии)

Расчеты прочности и жесткости конструкций и их деталей невозможно осуществить, если неизвестны механические свойства реальных материалов и их числовые характеристики, которые могут быть определены только экспериментально.

Важность экспериментальных исследований объясняется тем, что все решения сопротивления материалов являются приближенными. Поэтому их достоверность и пределы применимости могут быть установлены экспериментально. Механические свойства материалов при различных видах деформаций (растяжении, сжатии, кручении и т. д.) изучаются путем испытания на специальных машинах брусьев простейшей формы, называемых **образцами**. Испытания проводятся обычно при комнатной температуре. В последнее время большое внимание уделяется исследованию свойств материалов при повышенных температурах. Простотой и надежностью результатов отличаются испытания на растяжение. Испытательные машины снабжены динамометрами для замеров нагрузки на образец, а деформации образцов измеряются специальными приборами – тензометрами, устанавливаемыми непосредственно на образцах.

Применяют круглые и плоские образцы. Их размеры и конфигурация стандартизованы. Особенностью образцов является наличие на концах усиленных частей (головок под захват машины) и плавного перехода к более тонкой рабочей части постоянного сечения (рисунок 2.3).

Благодаря такой форме обеспечивается однородное напряженное состояние в его рабочей части.

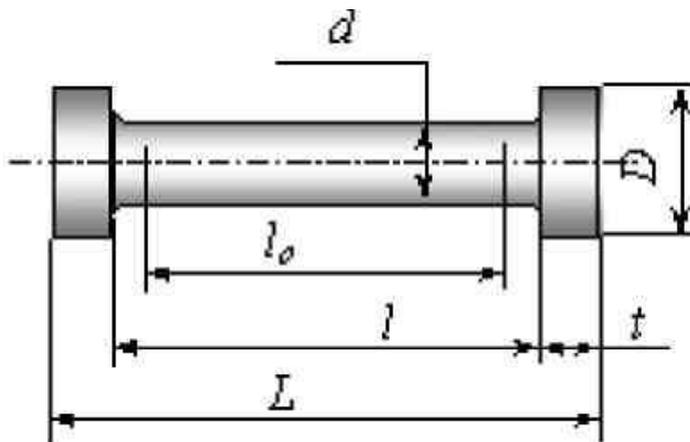


Рисунок 2.3 – К определению понятия «образец»

В процессе испытания изучают зависимость между нагрузками и вызванными ими удлинениями. Ее принято представлять в виде диаграмм растяжения. Как правило, испытательные машины оборудованы специальными приспособлениями для автоматической записи диаграмм.

При построении диаграмм растяжения по оси абсцисс откладывают удлинения Δl рабочей части образца, а по оси ординат – соответствующие им значения растягивающей силы P .

На рисунке 2.4 представлена диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали. Эту диаграмму можно разделить на три характерных участка.

На участке OA , соответствующем *стадии упругости* образца, деформации материала подчиняются закону Гука.

На участке AB рост нагрузки замедляется, а затем почти прекращается при одновременном увеличении удлинений. Явление значительного роста удлинений без заметного возрастания нагрузки называется текучестью, а горизонтальный (или почти горизонтальный) участок диаграммы растяжения называется площадкой текучести.

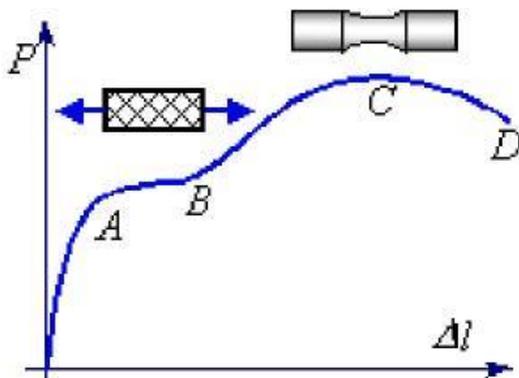


Рисунок 2.4 – Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали

На стадии общей текучести полированную поверхность образца покрывают сеткой тонких линий, называемых линиями сдвига, или *линиями Чернова*, по фамилии русского металлурга, впервые их описавших. Эти линии являются следами плоскостей взаимного скольжения (сдвига) частиц материала. Они наклонены к оси бруса под углом, близким к 45° , и практически совпадают с плоскостями действия максимальных касательных напряжений.

У многих материалов, например легированных сталей, дюралюминия, обнаруживают пластические свойства, но они не имеют площадки текучести.

На участке BC , называемом *зоной упрочнения*, материал вновь приобретает свойство оказывать сопротивление нагрузке. Однако возрастание удлинения образца нагрузки приводит к повышению значительно медленнее, чем на

упругом участке.

В зоне упрочнения равномерное до этого уменьшение поперечных размеров рабочей части образца нарушается появлением местного утончения – шейки. Деформация образца приобретает местный характер течения материала в области шейки, поэтому с быстрым уменьшением сечения образца в этом месте для развития деформаций требуется меньшая нагрузка. Этим объясняется падение нагрузки за точкой C на диаграмме растяжения. Точка D диаграммы соответствует разрушению образца.

2.7 Диаграмма условная и истинная. Механические характеристики материала

Диаграмма растяжения в осях Δl и P является по существу характеристикой образца из определяемого материала, так как при одном и том же значении силы P величина удлинения зависит от поперечных и продольных размеров образца. Чтобы исключить влияние размеров образца и получить характеристику материала, диаграмму растяжения перестраивают в координатах σ и ε .

При переходе от нагрузок P к напряжениям σ и от абсолютных удлинений Δl к относительным ε обычно пренебрегают изменением площади сечения образца в процессе растяжения, а также неравномерностью распределения деформаций по длине его рабочей части после образования шейки. Напряжение σ подсчитывают делением нагрузки P на первоначальную площадь F_0 сечения образца, а ε – делением удлинения всей его рабочей части на ее первоначальную длину l_0 . Полученная таким способом диаграмма называется диаграммой условных напряжений, и по характеру она не отличается от графиков напряжения построенных с осями P и Δl .

Диаграмма условных напряжений для малоуглеродистой стали показана на рисунке 2.5.

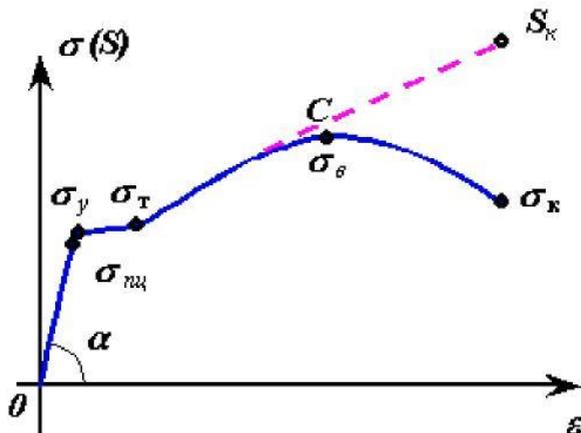


Рисунок 2.5 – Диаграмма условных напряжений

Уравнение линейного участка этой диаграммы на начальной стадии нагружения $\sigma = E\epsilon$ представляет собой известную математическую запись закона Гука при одноосном растяжении. Следовательно, численно модуль упругости равен тангенсу угла α наклона к оси абсцисс прямолинейного участка диаграммы растяжения.

Если на ней по оси ординат откладывают напряжение, полученное делением силы на наименьшую площадь сечения образца, а по оси абсцисс – наибольшее удлинение в этот момент нагружения, то есть называют диаграммой истинных напряжений. На рисунке 2.5 она показана пунктиром. Снижения напряжений за точкой C не наблюдается, так как площадь сечения в шейке уменьшается быстрее, чем уменьшается нагрузка, поэтому средние показатели напряжения в этом месте возрастают. Вследствие образования шейки распределение напряжений по сечению становится неравномерным, а частицы материала в этом месте испытывают растяжение не только

в продольном, но также в радиальном и окружном направлениях. Это приводит к образованию внутри шейки поперечной трещины. Различие диаграмм условных и истинных напряжений становится значительным только после образования шейки.

Под механическими характеристиками подразумевают значения напряжений и деформаций, соответствующие определенным точкам на диаграмме условных напряжений.

Предел пропорциональности $\sigma_{i\ddot{o}}$ – наибольшее напряжение, до которого деформации прямо пропорциональны напряжениям.

Предел упругости σ_y – напряжение, до которого материал не получает остаточных деформаций.

Предел текучести σ_T – напряжение, при котором деформации возрастают без заметного увеличения нагрузки.

Пределом прочности, или **временным сопротивлением** σ_B называется максимальное напряжение (подсчитанное по первоначальной площади сечения образца), выдерживаемое материалом при растяжении. Его величина определяется ординатой точки *C* условной диаграммы.

Под пределом пропорциональности $\sigma_{i\ddot{o}}$ понимают напряжение, при котором отступление от линейной зависимости достигает определенной величины, устанавливаемой техническими условиями.

Пределом упругости считают напряжение, при котором остаточные деформации достигают заранее установленной величины в пределах 0,001–0,005 % (-5...+3 °C). Условный предел упругости при остаточной деформации 0,005 % обозначается $\sigma_{0,005}$.

Для материалов, не имеющих площадки текучести, в качестве предела текучести условно принимают напряжение, при котором остаточные деформации составляют 0,2 или 0,3 % первоначальной длины образца. Условный или техниче-

ский предел текучести в соответствии с допуском на остаточную деформацию обозначают $\sigma_{0,2}$ или $\sigma_{0,3}$.

В теоретических исследованиях индексы 0,2 и 0,3 обычно опускают и условный предел текучести обозначают символом σ_T . Предел текучести является одной из основных характеристик материала. Его пластические свойства, то есть способность к образованию остаточных деформаций, характеризуются относительной величиной остаточного удлинения образца при разрыве:

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100 \%, \quad (2.14)$$

а также относительным уменьшением площади сечения образца в шейке:

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \cdot 100 \%, \quad (2.15)$$

где l_1, F_1 – длина рабочей части образца и площадь наименьшего сечения шейки разорванного образца, соответственно;

l_0, F_0 – их величины до нагружения.

2.8 Закон разгрузки и повторного нагружения. Влияние температуры на механические характеристики

Если образец нагрузить до напряжений, больших σ_y , но меньших σ_B , например до точки K диаграммы (рисунок 2.6), а затем начать разгружать, то разгрузка будет происходить по прямой KL , параллельной начальному линейному участку диаграммы.

После разгрузки деформация образца уменьшится, но полностью не исчезнет.

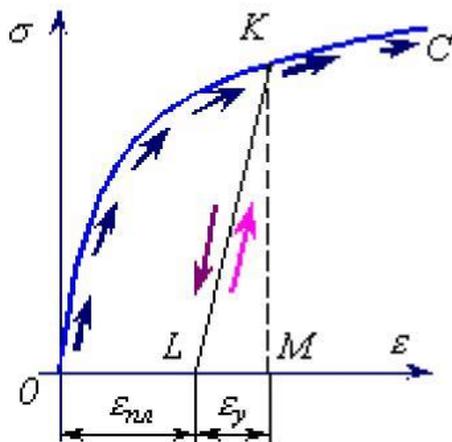


Рисунок 2.6 – К определению степени свободы диска

Отрезок LM определяет величину исчезающей, т. е. упругой деформации σ_y , а отрезок OL – величину остаточной (пластической) деформации ϵ_{nl} . Прямолинейность линии разгрузки показывает, что упругая деформация подчиняется **закону Гука** и за пределами пропорциональности.

Повторное нагружение образца не повторяет полностью прежнюю диаграмму, а происходит сначала по прямой разгрузки KL , и затем по кривой KC , которую имел бы этот образец без промежуточной разгрузки. Следовательно, после нее появился новый материал с более высоким пределом пропорциональности, но меньшей пластичностью.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется **наклепом** или **нагартовкой**. Наклеп возникает при вытяжке, холодной прокатке металла, в процессе штамповки. Часто наклеп играет положительную роль и применяется для

упрочнения поверхностного слоя детали, повышения упругих свойств проволоки, канатов и т. п. В тех случаях, когда наклеп вреден, его устраняют отжигом.

По результатам испытаний на одноосное растяжение материалы принято делить на пластичные и хрупкие. К пластичным относятся материалы, разрушению которых предшествуют большие остаточные деформации, достигающие иногда 20–25 %. Хрупкими называют материалы, разрушающиеся при малых остаточных деформациях, не превышающих 2–5 %. Характерными представителями пластичных материалов являются малоуглеродистая сталь и алюминий, а хрупких – чугун, инструментальная сталь и стекло. Пластичные и хрупкие материалы отличаются характером разрушения при растяжении. Пластичные материалы проявляют большее сопротивление отрыву частиц, чем их взаимному сдвигу, и разрушаются главным образом от сдвига частиц в плоскостях действия наибольших касательных напряжений.

Вследствие сдвига частиц увеличивается длина образца из пластичного материала при его растяжении, а место разрушения в шейке имеет вид кратера, стенки которого наклонены к оси образца под углом 45°. Дном этого кратера является поверхность первоначальной внутренней трещины, возникающей после образования шейки.

Хрупкие материалы, наоборот, обладают большим сопротивлением сдвигу, чем отрыву, и разрушаются при растяжении внезапно от отрыва частиц материала по плоскости поперечного сечения. Явления текучести, упрочнения и образования шейки на образцах из таких материалов перед разрывом не наблюдаются. Единственной прочностной характеристикой хрупких материалов считается предел прочности σ_B .

Деление материалов на хрупкие и пластичные является условным, так как свойства материалов зависят от температуры, скорости и вида нагружения. Один и тот же материал в одних определенных условиях является хрупким, в других – пластичным. Например, мрамор при одноосном растяжении

разрушается как хрупкий материал, а при всестороннем сжатии проявляет пластические свойства. Поэтому необходимо учитывать пластичный и хрупкий характер разрушения материала. Первое происходит при больших, а второе – при сравнительно малых остаточных деформациях.

При сжатии образца из пластичного материала, как и при растяжении, сначала имеет место линейная зависимость \mathcal{E} от σ , затем появляются площадка текучести и зона упрочнения. В отличие от растяжения площадка текучести едва намечается, и в дальнейшем нагрузка возрастает. Это происходит потому, что при сжатии образец из пластичного материала не разрушается, а постепенно сплющивается в тонкий диск при одновременном увеличении площади сечения. Определить предел прочности пластичного материала при сжатии невозможно, так как он не существует.

С целью испытаний на сжатие применяют короткие цилиндрические образцы. Бочкообразная форма, которую они принимают в процессе испытания, объясняется наличием сил трения между плитами пресса и торцами образца.

Для пластичных материалов характерно малое отличие пределов текучести при растяжении σ_T^p и сжатии $\sigma_T^{сж}$. Различие в работе материала на растяжение и сжатие характеризуется коэффициентом $\nu_T = \sigma_T^p / \sigma_T^{сж}$. Материалы, у которых $\nu_T = 1$, одинаково работают на растяжение и сжатие.

Образцы из хрупких материалов при сжатии разрушаются внезапно, раскалываясь по наклонным (под углом 45°) плоскостям.

Качественные особенности у обоих кривых одинаковы, но сравнения результатов пределов прочности при растяжении и сжатии показывают, что хрупкие материалы, как правило, в большей степени применяют на сжатие, чем на растяжение. Например, у чугуна предел прочности при сжатии в среднем в три раза больше, чем при растяжении.

Изучение основных механических характеристик при повышенных температурах в условиях кратковременных испытаний показывает, что у большинства материалов предел прочности и текучести и модуль упругости с возрастанием температуры уменьшаются, а пластические свойства повышаются.

Однако заметное изменение этих характеристик наблюдается при достаточно высоких температурах.

У некоторых материалов при длительном пребывании в нагретом состоянии наблюдается явление, называемое охрупчиванием. Оно выражается в уменьшении удлинения при разрыве и некотором возрастании предела прочности.

При повышенных температурах на механические характеристики материалов влияет продолжительность действия нагрузки. Вследствие этого при высоких температурах характеристики становятся неопределенными. Фактор времени сказывается и при нормальной температуре, но для большинства металлов его влияние незначительно и в расчетах не учитывается.

2.9 Проектировочный расчет, площади поперечного сечения и допускаемой нагрузки

Определив напряжение в опасном сечении растянутого (сжатого) стержня по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.16)$$

выбирают допускаемое напряжение или на растяжение, или на сжатие в зависимости того, какой случай рассматривают.

Неравенство (2.16) называется условием прочности при растяжении (сжатии). Пользуясь этим уравнением, можно решать следующие задачи:

1. Проверять прочность стержня, т. е. определять по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения стержня фактические напряжения и сравнивать их с допускаемыми. Фактические напряжения не должны отклоняться от допускаемых более чем на $\pm 5\%$. Перенапряжение более этого значения недопустимо с точки зрения прочности, а недонапряжение свидетельствует о перерасходе материала.

2. Определять размеры поперечного сечения стержня (по известным нагрузке и допускаемому напряжению), требуемые по условию его прочности:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.17)$$

3. Рассматривать допускаемую продольную силу по заданным размерам поперечного сечения стержня и известному допускаемому напряжению:

$$[N] \leq F \cdot [\sigma]. \quad (2.18)$$

Установив допускаемую продольную силу и найдя связь между продольной силой и нагрузкой (методом сечений), можно вычислить допускаемую нагрузку.

Сжатые стержни, кроме расчета на прочность в наиболее ослабленном сечении, должны также рассчитываться на устойчивость, так как при определенном значении сжимающей силы может произойти выпучивание (продольный изгиб) сжатого стержня.

Контрольные вопросы

1. Что такое статический момент сечения относительно оси?
2. В каких единицах измеряется статический момент?
3. Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?

4. По каким формулам определяют координаты центра тяжести сечения?

5. Что называют осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения?

6. В чем измеряют моменты инерции?

7. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно взаимно перпендикулярных осей, имеющих общее начало координат?

8. Какие моменты инерции всегда положительны?

9. Для каких фигур и относительно каких осей центробежный момент инерции равен нулю?

10. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника и треугольника относительно центральных осей, параллельных их основанию?

11. Чему равен осевой момент инерции круга относительно центральных осей?

12. Как распределяются по сечению силы упругости при растяжении и сжатии? (Использовать гипотезу плоских сечений).

13. Как вычисляется значение продольной силы в произвольном поперечном сечении стержня?

14. Какого характера напряжения возникают в поперечном сечении при растяжении и сжатии: нормальные или касательные?

15. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях центрально-растянутого или центрально-сжатого стержня и по какой формуле они определяются?

16. Получите формулу нормальных напряжений при растяжении (сжатии)? Какие предпосылки используют при выводе этой формулы?

17. Как записывается условие прочности бруса при растяжении (сжатии)? Какие виды задач решают с помощью условия прочности?

18. В каких единицах измеряется напряжение?

ГЛАВА 3. СДВИГ

3.1 Анализ напряженного состояния при чистом сдвиге

Деформации сдвига проявляются, когда из шести компонентов главного вектора и момента внутренних сил отличны от нуля только поперечные силы (Q_y или Q_z). С достаточной степенью приближения деформация сдвига или среза практически может быть получена в случае, когда на рассматриваемый брус с противоположных сторон на близком расстоянии друг от друга действуют две равные силы, перпендикулярные оси бруса и направленные в противоположные стороны. Примером такого действия сил на брус может быть разрезание ножницами прутьев, полосы (рисунок 3.1).

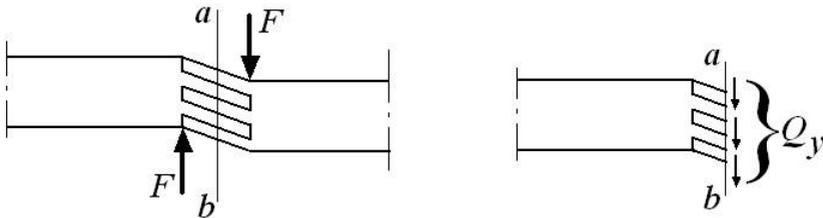


Рисунок 3.1 – К определению сдвига

Вообще на практике сдвиг в чистом виде получить трудно, так как обычно деформация сдвига сопровождается другими видами деформаций и чаще всего изгибом.

Формулы для напряжений и деформаций необходимы при расчете на срез элементов конструкций, имеющих форму бруса. Известна внешняя нагрузка P , в частности, для случая, представленного на рисунке 3.1. Используя метод сечений, находят, что на участке ba поперечная сила $Q_y = P$.

Опуская в дальнейшем индекс при Q , устанавливают связь между поперечной силой и напряжениями, действующими в рассматриваемом сечении. Сечение сместилось, сохраняя свою форму и размеры всеми точками на одинаковую

величину. Следовательно, касательные напряжения τ равномерно распределены по площади поперечного сечения, откуда $\tau = \frac{P}{F}$.

Допущение о равномерности распределения касательных напряжений по сечению условно. Однако оно во многих случаях себя оправдывает, и поэтому в инженерной практике им широко пользуются в расчете болтов, заклепочных соединений, шпонок, сварных соединений и других деталей.

3.2 Взаимосвязь модуля упругости первого и второго рода и коэффициента Пуассона

В процессе расчета ряда элементов конструкций встречается частный случай плоского напряженного состояния, когда на четырех гранях прямоугольного элемента действуют только касательные напряжения (рисунок 3.2). Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*.

Находят величину и направление главных напряжений при таком напряженном состоянии. Для этого необходимо воспользоваться построением круга напряжений. Поскольку в этом случае $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$; $\tau_\alpha = -\tau$; $\tau_\beta = \tau$ то, построив круг напряжений, находят, что $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, а главные площадки наклонены к граням элемента под углом 45° . Третья главная площадка совпадает с ненагруженной фасадной гранью элемента, следовательно, $\sigma_2 = 0$.

При рассмотрении деформации элемента $abcd$ (рисунок 3.2), отмечено, что по граням элемента отсутствуют напряжения, а вдоль граней – удлинения.

В то же время диагональ ac , совпадающая с направлением σ_1 , удлиняется, а диагональ bd , совпадающая с направлением сжимающего напряжения σ_3 , укорачивается. В результате квадрат $abcd$ превращается в ромб $a'b'c'd'$. Таким образом, деформация чистого сдвига характеризуется изменением первоначально прямых углов.

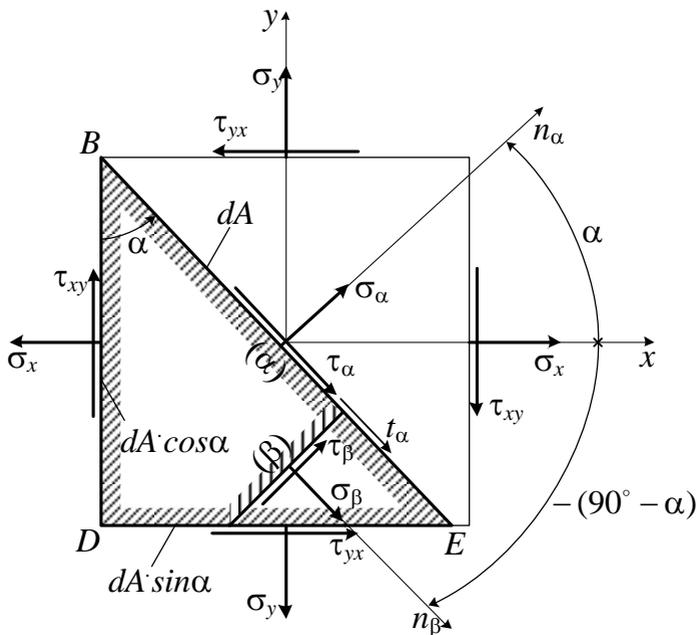


Рисунок 3.2 – К определению деформации элемента

Наглядное представление о деформации элемента можно получить, закрепив одну из граней. Малый угол γ , на который изменяется первоначально прямой угол, называется углом сдвига (или относительным сдвигом). Величину абсолютного смещения грани обозначают Δs и называют абсолютным сдвигом. Из треугольника B_0B_1 следует, что $\tan \gamma = \frac{\Delta s}{a}$. Учитывая малость угла, можно считать, что $\tan \gamma \approx \gamma$, тогда $\gamma = \frac{\Delta s}{a}$.

Зависимость между нагрузкой и деформацией при сдвиге можно проследить по диаграмме. Для пластичных материалов она аналогична диаграмме растяжения.

Экспериментально диаграмму сдвига можно получить при скручивании тонкостенной трубы. Действительно, мысленно выделенный элемент стенки трубы (ячейка ортогональной

сетки линий, предварительно нанесенной на поверхности трубы), находится в условиях «чистого сдвига». При рассмотрении деформации этого элемента в пределах упругости пришли к выводу, что между относительным сдвигом и касательными напряжениями, действующими по граням элемента, согласно диаграмме сдвига, существует линейная зависимость: $\tau = \gamma G$, где G — коэффициент пропорциональности, который называется модулем упругости при сдвиге или модулем упругости второго рода и измеряется в $\text{кгс}/\text{см}^2$ (или $\text{н}/\text{м}^2$). Для изотропных материалов между модулем упругости G при сдвиге и модулем упругости E при растяжении существует определенная зависимость.

Контрольные вопросы

1. Запишите формулы для общего случая плоского напряженного состояния.
2. Изменяется ли сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках при их повороте?
3. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
4. Как найти напряжения при плоском напряженном состоянии на наклонных площадках, если известны главные напряжения?
5. Как найти при плоском напряженном состоянии главные напряжения и установить их направления, если известны напряжения на произвольных двух взаимно перпендикулярных площадках?
6. По каким формулам при объемном напряженном состоянии можно найти напряжения?
7. Приведите определение, сдвига?

ГЛАВА 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ

4.1 Основные определения. Общие свойства геометрических характеристик

Деформации и напряжения в брусе существенно зависят от размеров и формы его поперечных сечений. Поэтому во всех расчетных формулах обязательно присутствуют их геометрические характеристики. При одноосном растяжении и сжатии такой характеристикой является площадь сечения. В теории кручения и изгиба используют более сложные геометрические характеристики, так как в этих случаях напряжения и деформации зависят не только от площади, но и от формы сечения.

На рисунке 4.1 изображено произвольное сечение, отнесенное к некоторой системе координат (y, z) ,

где F – величина площади сечения;

dF – элементарная часть этой площади;

y, z – координаты элементарной площадки;

ρ – радиус-вектор;

C – центр тяжести площади сечения.

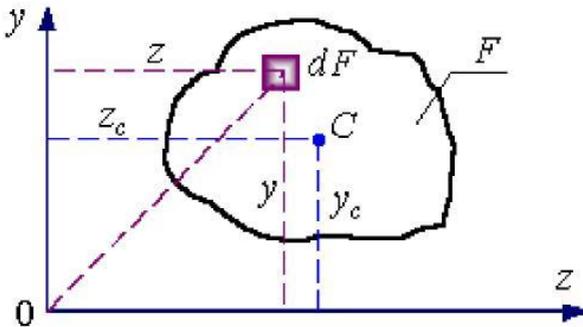


Рисунок 4.1 – К определению геометрических характеристик сечения

Площадь F , ограниченная произвольной кривой, вычисляется по формуле:

$$F = \int_F dF, \text{ м}^2. \quad (4.1)$$

Статические моменты площади F относительно осей y и z находят по формулам:

$$S_y = \int_F z \cdot dF, \quad S_z = \int_F y \cdot dF. \quad (4.2)$$

Размерность статического момента сечения – единица длины в третьей степени [м^3].

Если известны величина площади F и координаты ее центра тяжести, то S_y, S_z определяют по формулам:

$$S_y = F \cdot z_c, \quad S_z = F \cdot y_c. \quad (4.3)$$

Отсюда, если известны площадь и статические моменты, то **координаты центра тяжести** площади F определяют по формулам:

$$z_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_z}{F}. \quad (4.4)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются **центральными**. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

Центр тяжести сечения лежит на оси симметрии сечения. Если оно имеет хотя бы две оси симметрии, то центр тяжести расположен на пересечении этих осей.

Для сложного сечения, состоящего из n простейших фигур, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (4.5)$$

где z_i, y_i и F_i – координаты центров тяжести и площади сечений отдельных фигур.

Осевые моменты инерции площади F определяют по формулам:

$$I_y = \int_F z^2 \cdot dF, \quad I_z = \int_F y^2 \cdot dF. \quad (4.6)$$

Центробежный момент инерции площади F рассчитывают по формуле:

$$I_{yz} = \int_F y \cdot z \cdot dF. \quad (4.7)$$

Полярный момент инерции (относительно начала координат) площади F находят по формуле:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \cdot dF. \quad (4.8)$$

Так как $\rho^2 = y^2 + z^2$:

$$I_\rho = I_y + I_z. \quad (4.9)$$

Осевые моменты инерции можно представить как произведения площади фигуры на квадраты некоторых вспомогательных величин, имеющих размерность длины и называемых радиусами инерции. Следовательно, относительно осей y и

z радиусы инерции для сечения определяют по формулам:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}. \quad (4.10)$$

Осевые и полярный моменты инерции, представляющие пределы сумм положительных величин, всегда положительны. Центробежный момент инерции может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю, так как координаты y и z входят в его выражение в первых степенях.

4.2 Статические моменты плоской фигуры, центральные оси, центр тяжести

Пусть известны осевые I_{y_C}, I_{z_C} и центробежный $I_{y_C z_C}$ моменты инерции сечения относительно его центральных осей. Требуется определить моменты инерции I_y, I_z, I_{yz} того же сечения относительно осей y и z , параллельных центральным данным (рисунок 4.2).

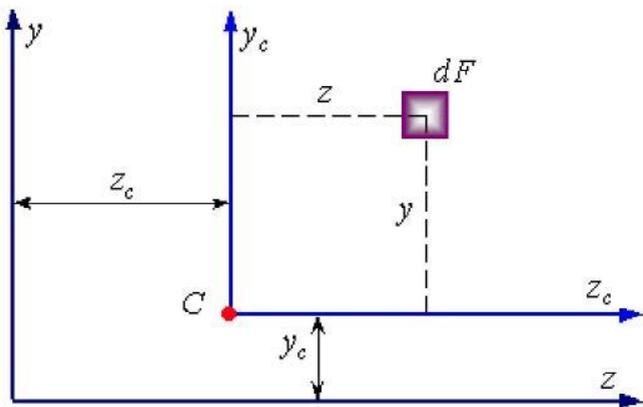


Рисунок 4.2 – Параллельный перенос осей

Тогда согласно формулам (4.6) и (4.7) в принятых выше обозначениях имеем:

$$I_z = I_{z_c} + 2 \cdot y_c \cdot S_{z_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.11)$$

$$I_y = I_{z_c} + 2 \cdot z_c \cdot S_{y_c} + z_c^2 \cdot F, \quad (4.12)$$

$$I_{yz} = I_{z_c y_c} + y_c \cdot S_{y_c} + z_c \cdot S_{z_c} + y_c \cdot z_c \cdot F. \quad (4.13)$$

Учитывая, что относительно центральных осей статические моменты S_{z_c}, S_{y_c} равны нулю, получают следующую зависимость между моментами инерции при переходе от центральных осей к любым параллельным осям:

$$I_z = I_{z_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.14)$$

$$I_y = I_{y_c} + z_c^2 \cdot F, \quad (4.15)$$

$$I_{yz} = I_{z_c y_c} + y_c \cdot z_c \cdot F. \quad (4.16)$$

При переходе от нецентральных осей к нецентральному в формулах перехода (4.11) – (4.13) должны быть сохранены слагаемые с S_z и S_y . Из формул (4.14) – (4.16) видно, что наименьшее значение имеют осевые моменты инерции относительно центральных осей сечения, так как величины $y_c^2 F$ и $z_c^2 F$ всегда положительны. Центробежный момент при переходе от центральных осей к нецентральному в зависимости от знака произведения координат z_c и y_c может увеличиваться или уменьшаться.

4.3 Изменение моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей координат

В расчетной практике часто встречаются сечения в виде простейших фигур (прямоугольников, кругов, треугольников) или их комбинаций. При вычислении моментов инерции таких фигур обычно используют заранее выведенные расчетные формулы. Рассмотрим некоторые из простых фигур.

Прямоугольник и **параллелограмм** (рисунок 4.3). Выделяют элементарную полоску площадью $dF = bdy$ и подставляют это значение dF под знак интеграла (4.6):

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}.$$

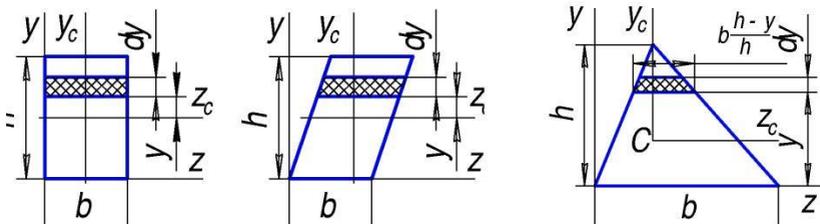


Рисунок 4.3 – К вычислению моментов инерции простых фигур

Следовательно, момент инерции прямоугольника и параллелограмма с основанием b и высотой h относительно центральной оси, параллельной основанию, равен:

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.17)$$

Моменты инерции этих фигур относительно осей, проходящих через основание, находим по формуле (4.14):

$$I_z = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{bh^3}{3}. \quad (4.18)$$

Моменты инерции прямоугольника относительно осей y_c и y вычисляются по формулам (4.17) и (4.18), где b заменяют на h , а h на b :

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.19)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{hb^3}{3}. \quad (4.20)$$

Треугольник с основанием b и высотой h (рисунок 4.3).

Разбивают треугольник на элементарные полоски, параллельные его основанию и площадью:

$$dF = b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot y^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Тогда момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через основание, равен:

$$I_z = \int_0^h b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot y^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.21)$$

Подсчитывая по формулам переноса момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию, получают:

$$I_{zC} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.22)$$

Круг и полукруг диаметра d (рисунок 4.4).

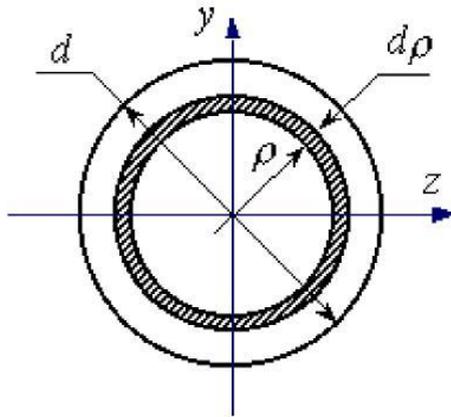


Рисунок 4.4 – Кольцо

Подсчитывают сначала полярный момент инерции круга. Для этого выделяют в сечении окружностями радиуса ρ и $\rho + d\rho$ элементарное кольцо площадью $dF = 2\pi\rho d\rho$ и вычисляют I_ρ по формуле (4.8):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (4.23)$$

Обычно размеры круглого сечения выражают через диаметр d и подсчитывают I_ρ по формуле:

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (4.24)$$

Осевые моменты инерции круга находят с помощью соотношения (4.9). В силу симметрии круга $I_z = I_y$ для осевых моментов инерции круга получают выражение:

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.25)$$

Центральные оси y и z делят круг на четыре одинаковые части с равными моментами инерции относительно этих осей. Следовательно, моменты инерции круга и полукруга относительно осей y и z должны быть равны соответственно учетверенным и удвоенным моментам инерции относительно тех же осей одной четверти круга. Из сказанного следует, что моменты инерции полукруга относительно оси симметрии y и оси z , проходящей через его основание (рисунок 4.5), будут одинаковы и равны половине момента инерции круга,

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{128}, \quad (4.26)$$

а момент инерции относительно центральной оси z_C :

$$I_{z_C} = \frac{\pi d^4}{256}. \quad (4.27)$$

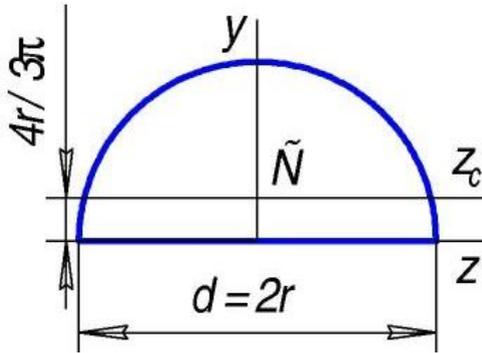


Рисунок 4.5 – Полуокруг

4.4 Вычисление моментов инерции сложных фигур

Всякую сложную фигуру обычно можно разбить на ряд простейших фигур, моменты инерции которых относительно их центральных осей известны. Применяв формулы переноса осей инерции, можно определить момент инерции сложной фигуры, алгебраически суммируя моменты инерции простых фигур относительно центральной оси сложной фигуры.

Например, осевой момент инерции толстостенного кольца с внешним диаметром D и внутренним d (рисунок 4.6) относительно любой центральной оси может быть найден как разность моментов инерции большого и малого кругов:

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4), \quad (4.28)$$

где α – коэффициент полости, $\alpha = d/D$.

Полярный момент инерции кольца находится аналогично:

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4). \quad (4.29)$$

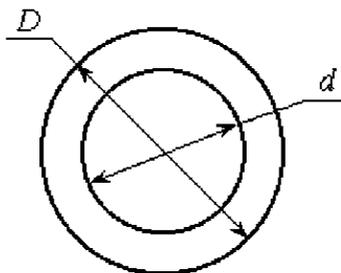


Рисунок 4.6 – К вычислению моментов инерции толстостенного кольца

Контрольные вопросы

1. Что такое статический момент сечения относительно оси? В чем измеряется статический момент? Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?

2. По каким формулам определяют координаты центра тяжести сечения? Что называют осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения? В чем измеряются моменты инерции?

3. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно взаимно перпендикулярных осей, имеющих общее начало координат? Какие моменты инерции всегда положительны?

4. Для каких фигур и относительно каких осей центробежный момент инерции равен нулю? Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника и треугольника относительно центральных осей, параллельных их основанию?

5. Чему равен осевой момент инерции круга относительно центральных осей? Запишите зависимости для осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе координатных осей.

6. Приведите формулы для осевых и центробежного моментов инерции при повороте координатных осей.

7. Какую размерность имеет статический момент сечения?

8. Как определяется положение центра тяжести сечения?
9. Каким соотношением связаны площадь, статические моменты и координаты центра тяжести фигуры?
10. Выведите формулы для определения осевых моментов инерции простых фигур: прямоугольник, круг.
11. Выведите зависимости между осевыми и центробежными моментами инерции сечения для параллельных осей.
12. Как определяются координаты центра тяжести сложного сечения?
13. Что понимается под осевым, полярным и центробежными моментами инерций? Какими свойствами они обладают?
14. Что такое полярный момент инерции?
15. Почему осевые и полярные моменты инерции не могут быть отрицательными?
16. Относительно какой из параллельных осей осевой момент инерции наименьший?
17. Когда используют полярный момент сопротивления?
18. Размерность моментов инерции сечения.
19. Для определения каких напряжений используют осевой момент сопротивления?
20. Как записываются формулы перехода для моментов инерции при параллельном переносе осей?
21. Какие свойства имеют главные центральные моменты инерции сечений?
22. Как определяют главные моменты инерции сложных сечений, имеющих оси симметрии?
23. У каких фигур положение главных центральных осей можно указать без вычислений?
24. Какие оси являются главными центральными у симметричной фигуры?
25. Какими экстремальными свойствами обладают главные оси?

ГЛАВА 5. ГИБКИЕ НИТИ

5.1 Виды нагрузок. Понятие эксплуатационных режимов

В технике рассматривают еще один вид растянутых элементов, при определении прочности которых важное значение имеет собственный вес. Это так называемые гибкие нити. С помощью такого термина обозначают гибкие элементы в линиях электропередач, в канатных дорогах, в висячих мостах и других сооружениях. В электроэнергетике для передачи электрической энергии используют линии электропередач, представляющие собой систему проводов, подвешенных на изоляторах. При воздействии климатических факторов (температуры, ветра, гололеда) внутренние силы (усилия) изменяются. Задача расчета заключается в определении уравнения натяжения провода, которое необходимо задать при его монтаже, при условии, что в наиболее тяжелом (расчетном) режиме он не превысит допустимой величины.

Поскольку поперечные размеры провода пренебрежимо малы в сравнении с его длиной, в расчетах он представляется гибкой нитью это стержень, воспринимающий только растягивающие усилия, которые направлены вдоль нити или по касательной к кривой провисания. Гибкая нить не может воспринимать усилия сжатия и изгиба. Стержнем называется тело, один размер которого (длина) значительно больше, чем два других характерных размера. Балка – это брус, подверженный изгибу. В общем случае на эти элементы воздействуют продольные и поперечные силы и изгибающие моменты, под действием которых стержни деформируются, без кручения (растягиваются и изгибаются). Основным допущением при расчетах стержней является гипотеза плоских сечений (*гипотеза Бернулли*). Ее можно сформулировать так: поперечное сечение стержня при его деформации не искривляется и остается плоским и после нее.

На рисунке 5.1 а показано исходное положение стержня до деформации. Сечение $n - n$ перпендикулярно оси OA . После деформирования сечение $n - n$ остается плоским и перпендикулярным касательной к оси OA в точке « x_n ». При деформации расстояние между точками сечений $n - n$ и $m - m$ на верхней грани стержня уменьшается, а на нижней грани увеличивается. Расстояние между точками « x_n » и « x_m » на оси OA остается неизменным. Поэтому ось OA называется нейтральной.

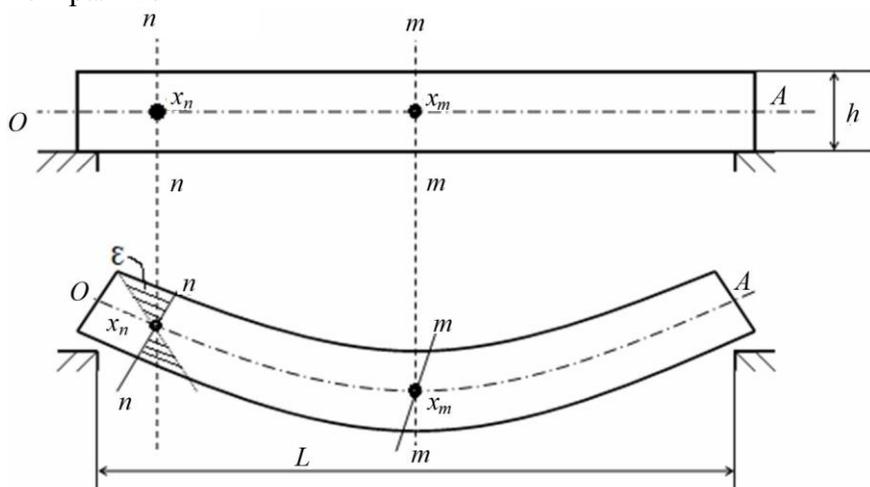


Рисунок 5.1 – Изгиб стержня при гипотезе плоских сечений

Как показывают эксперименты, гипотеза плоских сечений применима упругих и пластических деформациях и соотношении $l/h > 5$, когда характер изменения деформации по высоте сечения стержня можно принять линейным.

В случае с балкой максимальное отклонение оси OA после деформации от исходного положения (прогиб) пренебрежимо мало, но сравнимо с высотой поперечного сечения h . Изгибающий момент в сечении максимального прогиба, создаваемый продольными силами в балке, не превышает 2–3 %.

Если высота поперечного сечения стержня пренебрежимо мала по сравнению с его прогибом, то такой стержень

называется гибким (или гибкой нитью). Она может воспринимать только усилия растяжения.

Показатели напряжения изгиба в поперечном сечении гибкого стержня при распределенной нагрузке не превышают 2–3 % от напряжения растяжения. При приложении к гибкому стержню сосредоточенных сил напряжения изгиба вблизи точки приложения могут достигать существенных значений.

Таким образом, гибкая нить – длинный тонкий стержень, находящийся под воздействием продольной и поперечной нагрузки, но деформирующийся только вдоль его продольной оси на растяжение.

Как гибкие нити, рассчитывают параметры на примере провода линий электропередач ЛЭП, тросы канатных дорог, висячих мостов, кранов и т. д. Их главной особенностью является то, что выбор материала, размер поперечного сечения и строение определяются из электрических соображений. При выборе провода необходимо проверить его на прочность, чтобы в любом режиме эксплуатации не произошло его обрыва. Определяют минимальную высоту закрепления проводов на опорах и условия для этого в монтажном режиме.

Нагрузки, воздействующие на провода ЛЭП:

- собственный вес;
- масса снега и льда при обледенении проводов;
- ветровое воздействие;
- при изменении температуры окружающей среды в проводах могут возникнуть большие внутренние усилия за счет изменения их длины.

Пусть провод провисает между точками закрепления на разном уровне. Собственный вес провода равномерно распределен по его длине, направлен вертикально вниз и имеет интенсивность $q_n = \gamma \cdot A$ (Н/м),

q_n – вес одного погонного метра провода (Н/м);

γ – объемный вес материала провода (Н/м³);

A – площадь поперечного сечения провода (м²).

5.2 Расчет линий электропередачи на прочность. Понятие критической длины

Примем, что точки крепления провода находятся на одной горизонтальной прямой. Расстояние между этими точками называется длиной пролета. Рассмотрим один пролет провода линии электропередач. Внешней по отношению к гибкой нити является ее сила тяжести, которая считается как распределенная. Обозначим интенсивность провисания пролета нагрузкой g , представляющей собой силу тяжести единицы длины гибкой нити. Расчетная схема представлена на рисунке 5.2.

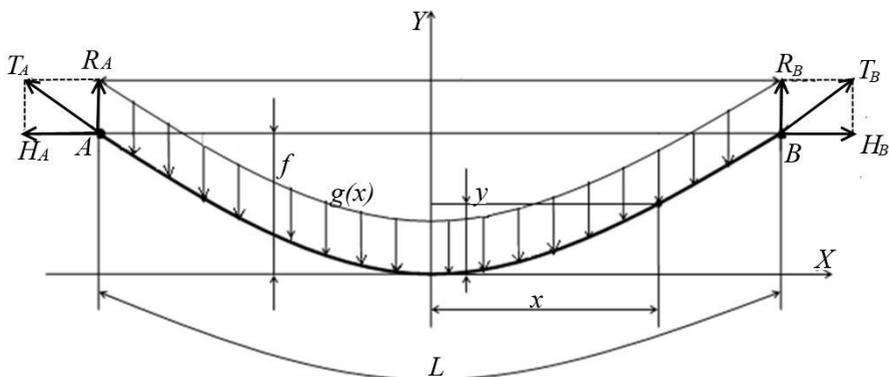


Рисунок 5.2 – Расчетная схема для определения уравнения провисания тяжелой гибкой нити

Связь гибкой нити с соседними пролетами заменим реакциями T_A и T_B , соответствующими принципам освобожденности от механических связей. Длина гибкой нити L больше длины пролета l на $\Delta l = L - l$. При возрастании значения Δl увеличивается провисание нити. Для определения уравнения провисания $y = f(x)$ выделяют элемент гибкой нити длиной dL на расстоянии x от начала координат (рисунок 5.3).

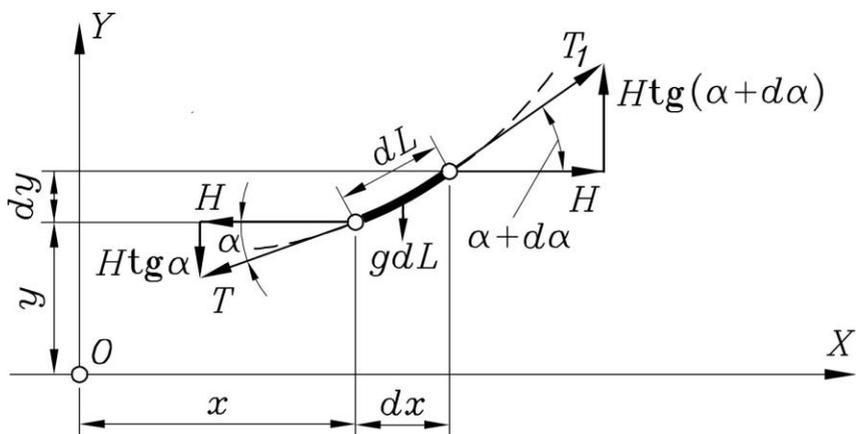


Рисунок 5.3 – Элемент гибкой нити длиной dL

На этот элемент действуют:

- сила тяжести элемента ($g \cdot dL$);
- сила T , равная внутренней силе в гибкой нити в сечении « x »;
- сила T_1 , равная внутренней силе в гибкой нити в сечении « $x + dx$ ».

Из уравнения равновесия геометрической статики для рассмотренной системы сил относительно оси X получают, что горизонтальная составляющая силы T равна горизонтальной составляющей силы T_1 . Обозначим ее как H .

Из уравнения равновесия геометрической статики для рассмотренной системы сил относительно оси Y :

$$- g \cdot dL - H \cdot \operatorname{tga} + H \cdot \operatorname{tg}(a + da) = 0.$$

Совершенно гибкая нить та, которая сопротивляется только растяжению. У идеальной «гибкой нити» значения жесткости на кручение, изгиб, сдвиг и сжатие равны нулю. Это означает, что гибкая нить может воспринимать усилия только на растяжение, при этом растягивающие усилия направлены по касательной к продольной оси нити.

На практике используют очень много систем, которые рассматриваются как гибкие нити: воздушные линии

электропередач, провода электрифицированных железных дорог, цепи висячих мостов, канатные дороги и т. д.

Для расчета воздушной линии электропередачи необходимо обеспечить условие прочности провода $\sigma \leq [\sigma]$. Действующие значения напряжения, возникающие в проводе под влиянием внешних нагрузок, не должны превышать допускаемых значений.

Основные внешние факторы, изменяющие напряжения в проводе: температура внешней среды и действующая на провод нагрузка. Эти параметры вызывают различную по величине деформацию провода. Она взаимосвязана с напряжением внешних сил. Изменение условий эксплуатации, т. е. внешних сил приводит к изменению деформаций и напряжений.

Различные направления решения этой задачи:

– статическую – позволяет определить ряд силовых параметров и форму кривой провисания нити под действием внешних нагрузок;

– геометрическую – позволяет выяснить вопросы деформации от воздействия различных нагрузок;

– физическую – определяет деформацию в результате температурных воздействий, а также объединяет оба вида деформаций, и получается уравнение совместной деформации.

Решить вопросы о действующем значении напряжения и связанной с ним стрелы провисания, а также установить взаимосвязь этих параметров при изменении условий эксплуатации поможет уравнение состояния нити (провода) по величине деформации провода. Она взаимосвязана с напряжением благодаря воздействию внешних сил.

В качестве гибкой нити можем рассмотреть провода воздушной линии. При этом могут быть использованы однопроволочные и многопроволочные провода, скрученные из алюминиевых и стальных проволок для придания механической прочности в сочетании с высокой электропроводностью. Число проводов в фазе может быть: $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$.

При расчете прочности провода важно установить, при каком из перечисленных режимов напряжения в проводе будут достигнуты допускаемые значения. Этот режим называется исходным.

Для установления исходного режима необходимо определить критические пролеты.

Сравнивая два режима, под критическим пролетом понимают такой пролет $L_{кр}$, при котором напряженное состояние провода в обоих режимах будет равноопасным, т. е. напряжения в проводе будут равны допускаемым для каждого из сравниваемых режимов.

Исходный режим определяется при сравнении величин заданного пролета L с величиной $L_{кр}$.

Определяют исходный режим, при котором напряжение в проводе будет максимально допустимым. Для этого надо найти три значения $L_{кр}$:

$$L_{кр1} = \frac{[\sigma]_{III}}{\gamma_1} \cdot \sqrt{\frac{[\sigma]_{III} - [\sigma]_I + \alpha E (t_{cp} - t_{min})}{\frac{E}{24} \left[1 - \left(\frac{[\sigma]_{III}}{[\sigma]_I} \right)^2 \right]}}$$

$$L_{кр2} = \frac{[\sigma]_{II}}{\gamma_1} \cdot \sqrt{\frac{[\sigma]_{II} - [\sigma]_I + \alpha E (t_{гол} - t_{min})}{\frac{E}{24} \left[\left(\frac{\gamma_{max}}{\gamma_1} \right)^2 - \left(\frac{[\sigma]_{II}}{[\sigma]_I} \right)^2 \right]}}$$

$$L_{кр3} = \frac{[\sigma]_{II}}{\gamma_1} \cdot \sqrt{\frac{[\sigma]_{II} - [\sigma]_{III} + \alpha E (t_{гол} - t_{cp})}{\frac{E}{24} \left[\left(\frac{\gamma_{max}}{\gamma_1} \right)^2 - \left(\frac{[\sigma]_{II}}{[\sigma]_{III}} \right)^2 \right]}}$$

Получают неравенство: $L_{кр3} > L_1 > L_{кр1}$. Наиболее опасным будет режим среднегодовых температур.

Провода подвешивают в безветренные дни, когда нет гололеда, при любых температурных значениях. При этом нагрузкой на провод является собственный вес.

В таких условиях, выполняя работы с проводом, необходимо обеспечить такой подвес провода $f_{\text{подв}}$, следовательно, такое напряжение $f_{\text{подв}}$, чтобы в неблагоприятных условиях эксплуатации воздушной линии выполнялось условие прочности провода.

Согласно вышеуказанным расчетам можно сделать следующий важный вывод – рассчитанные механические напряжения в проводе при гололеде без ветра, при гололеде с ветром и при режиме минимальных температур оказываются большими в результате допустимого механического напряжения в проводе для нашего исходного режима (Режим III $[\sigma]_{\text{III}} = 6.75$). На основе этих данных можно сделать вывод, что провод марки АСО-700 не выдержит механических усилий при указанных режимах работы и разрушится. Следовательно, для проведения следующих расчетов необходимо использовать провод другой марки. Например, в качестве исходного для ЛЭП принимают провод марки АСУ-400 и повторяют все вышеуказанные расчеты. После этого формулируют соответствующие выводы о целесообразности проведения конечных расчетов.

5.3 Зависимость между стрелой провисания, силой натяжения, нагрузкой, длиной и температурой провода

Довольно часто при проектировании воздушных ЛЭП возникает задача расчета натяжения проводов и их стрел провеса при изменении значений температуры воздуха, появлении ветра и образовании гололеда. Воздушная ЛЭП должна быть спроектирована и смонтирована так, чтобы при любых сочетаниях атмосферных нагрузок провод не порвался и его стрела провеса не превысила допустимую величину. В результате расчета получают так называемые монтажные кривые,

т. е. зависимости натяжения провода и стрел провеса от температуры окружающей среды. Максимальную, минимальную температуру, толщину стенки гололеда и скорость ветра для контактной сети и воздушных ЛЭП учитывают с повторяемостью один раз в 10 лет.

Для того чтобы произвести подобный расчет, требуется уравнение состояния провода, которое показывает зависимость натяжений провода в двух различных режимах (при сочетании температуры t и результирующей нагрузки на провод q с учетом гололеда и ветра).

При выводе уравнения применяют следующие допущения:

- провод – гибкая пологая нить;
- нагрузка распределена равномерно по длине пролета, отсутствуют сосредоточенные силы.

Вводят следующие обозначения:

t_1 – начальная температура, соответствующая первому режиму, °С;

q_1 – нагрузка, приходящаяся на единицу длины провода при начальной температуре, Н/м;

H_1 – натяжение провода при начальной температуре, Н;

L_1 – длина провода, м;

f_1 – стрела провеса, м;

t_x , q_x , H_x , L_x и f_x – те же величины, соответствующие другому режиму;

α – коэффициент линейного удлинения материала провода, $1/^\circ\text{C}$;

E – модуль упругости материала провода, Па;

S – площадь поперечного сечения провода, м^2 .

При температуре t_x длина провода, с учетом, что натяжение осталось неизменным, будет равна:

$$L_x = L_1 [1 + \alpha(t_x - t_1)].$$

Изменение длины провода в пролете приведет к трансформации натяжения провода, а это вызовет его упругую

деформацию, которая изменит начальную длину L_x согласно закону Гука. Как видно, это уравнение симметрическое и каждое его слагаемое имеет размерность градус Цельсия ($^{\circ}\text{C}$). Это уравнение используют следующим образом: подставляют в выражение параметры провода E , S и α , длину пролета L , известное натяжение провода H_1 в начальном режиме (при q_1 и t_1), задают значения нагрузок q_x и температуры t_x для другого режима. После этого в формуле остается только одно неизвестное – это значение натяжения провода H_x , которое подбирают таким образом, чтобы выражение превратилось в тождество.

Стоит отметить, что выражение можно решить относительно H_x . При этом задача сведется к решению кубического уравнения. Как известно, оно разрешимо в радикалах, и можно вывести соответствующие формулы для рассматриваемого случая. Однако они получаются громоздкие, потому что их трудно применять в реальной инженерной практике. Для расчета монтажных кривых, т. е. зависимости натяжения провода и стрелы провеса от температуры монтажа, необходимо в формуле задать исходный режим (параметры с индексом 1). Как уже отмечалось, основная задача механического расчета провода воздушных ЛЭП состоит в том, чтобы при заданных климатических условиях провод не порвался. Максимальное натяжение провода в известном режиме не должно превысить допустимое натяжение $H_1 = H_{\text{дп}}$. При этом значения климатических нагрузок (q_1 и t_1), будут зависеть от климатических показателей, параметров самого провода и длины пролета. Для климатических условий России, как правило, характерны два режима:

– минимальных температур – t_1 равно температуре самого холодного дня в году, q_1 – нагрузке от собственного веса провода g , т. е. предполагается, что в этот момент отсутствует гололед и ветер.

– гололеда с ветром – t_1 равно температуре появления гололеда, принято $t = -5^{\circ}\text{C}$, q_1 – результирующей нагрузке q_f

на провод от одновременного действия гололеда с ветром (включает нагрузку от собственного веса провода g).

На сегодняшний момент механический расчет провода воздушной ЛЭП основан на уравнениях для пологой гибкой нити в случае равномерно распределенной по длине пролета нагрузки.

Контрольные вопросы

1. Приведите вывод точного уравнения провисания тяжелой гибкой нити.

2. Приближенное уравнение провисания гибкой нити под действием нагрузки равномерно распределенной по длине пролета.

3. Приведите определения длинной гибкой нити.

4. Дайте определение радиуса кривизны гибкой нити?

5. Сформулируйте определение стрелы провеса гибкой нити?

6. Распишите вывод уравнения провисания гибкой нити с разной высотой подвеса?

7. Приведите определения натяжения нерастяжимой тяжелой гибкой нити?

8. Что представляет собой реакция заземления?

9. Сколько кинематических ограничений нужно наложить на параметры балки, чтобы обеспечить ее неподвижность на плоскости?

10. Какие кинематические условия должны выполняться в заземлении, на шарнирной опоре и на границе участков балки?

11. При каком числе связей балка становится статически неопределимой?

12. Из каких условий определяют величины и направления опорных реакций?

13. Какое правило законов для определения поперечной силы используется?

ГЛАВА 6. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

6.1 Виды изгиба стержня, внутренние силовые факторы и дифференциальные зависимости

Изгибом называется такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты. Если они являются единственным силовым фактором, а поперечные и нормальные силы отсутствуют, то изгиб называется чистым. Если помимо изгибающих моментов в поперечных сечениях бруса возникают поперечные силы, то изгиб называется поперечным. Плоским изгибом бруса называется его деформация под действием внешних сил и пар сил, расположенных в одной центральной плоскости, причем силы направлены перпендикулярно нейтральной оси.

Горизонтальный брус, закрепленный на опорах и испытывающий деформацию изгиба, называется балкой. Существует три вида опор балок:

1. Подвижная шарнирная опора, в которой возникает только одна реакция, перпендикулярная плоскости качения и проходящая через центр катка (рисунок 6.1 а).

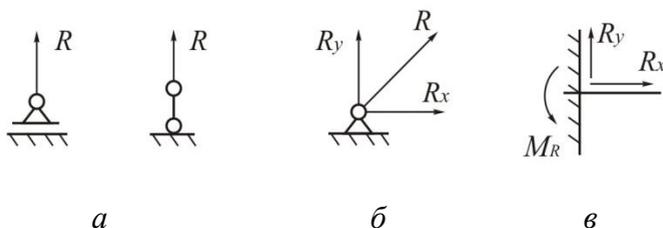


Рисунок 6.1 – К определению степени свободы диска:

а – подвижная шарнирная опора; б – неподвижная шарнирная опора;
в – жесткая заделка

2. Неподвижная шарнирная опора, возникающую реакцию в которой можно разложить на две составляющие – горизонтальную и вертикальную (рисунок 6.1 б).

3. Жесткая заделка или защемление; в этой опоре возникают момент защемления и реакция, которую раскладывают на две составляющие – горизонтальную и вертикальную (рисунок 6.1 в).

Балка с одним заделанным концом называется консолью. Если опорные реакции могут быть найдены из одних уравнений статики, то балки называют статически определенными. Если число неизвестных опорных реакций больше, чем число уравнений статики, возможных для решения задачи, то балки называют статически неопределимыми. С целью определения реакций в таких балках составляют дополнительные уравнения перемещений.

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки под воздействием внешней нагрузки возникают два внутренних усилия – изгибающий момент M и поперечная сила Q , для определения которых применяют метод сечений (рисунок 6.2).

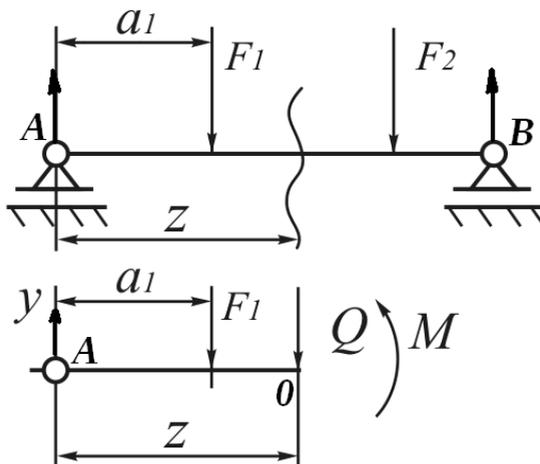


Рисунок 6.2 – К определению воздействия внешней нагрузки

В месте изменения сечения балки взаимодействие ее частей заменяют изгибающим моментом M и поперечной силой Q . Для определения M и Q используют уравнения равновесия:

$$1. \sum y = 0; \quad A - F_1 + Q = 0; \quad Q = \sum (F_i) y.$$

$$2. \sum M_0 = 0; \quad Az - F_1(z - a_1) - M = 0;$$

$$M = Az - F_1(z - a_1); \quad M = \sum m_0(F_i).$$

1. Равнодействующая внутренних сил упругости, поперечная сила в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

2. Изгибающий момент в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

Поперечная сила в сечении балки считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз; в противоположном случае она считается отрицательной (рисунок 6.3).

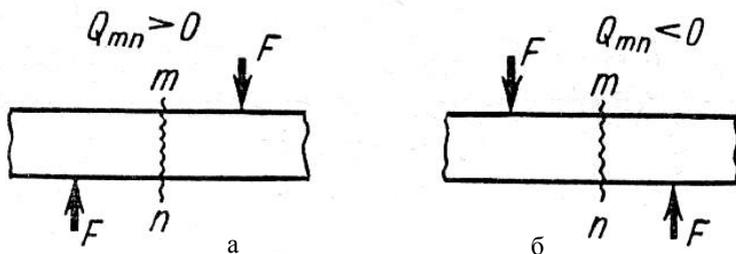


Рисунок 6.3 – Поперечная сила в сечении балки:

а – положительна; б – отрицательна

Изгибающий момент в сечении балки считается положительным, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки, отрицательным – в противоположном случае (рисунок 6.4).

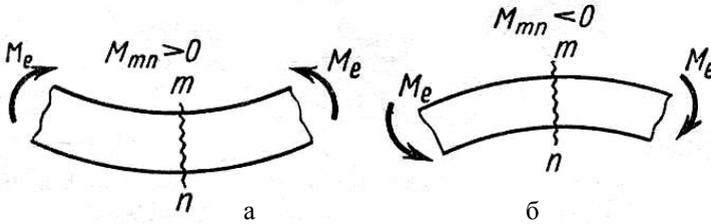


Рисунок 6.4 – Изгибающий момент в сечении балки:

а – положительный; б – отрицательный

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют определенные зависимости:

1) производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки:

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad (6.1)$$

2) производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе:

$$\frac{dM}{dz} = Q; \quad (6.2)$$

3) вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q. \quad (6.3)$$

Зависимости (6.1), (6.2), (6.3) используются при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Графики изменения поперечных сил и изгибающих моментов вдоль центральной оси балки называются эпюрами изгибающих моментов и поперечных сил (рисунок 6.5).

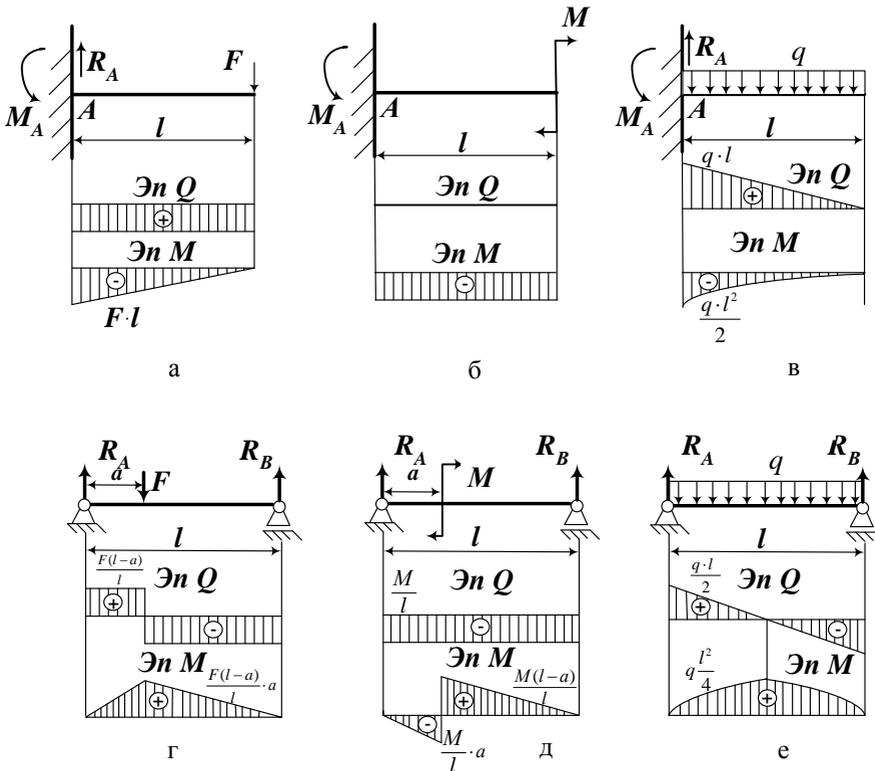


Рисунок 6.5 – Простейшие случаи нагружения:

а – сила; б – момент; в – распределенная нагрузка; г – сосредоточенная сила; д – изгибающий момент; е – равномерно распределенная нагрузка

Построение эпюр Q и M начинают с определения опорных реакций. Затем балку разбивают на участки, на протяжении которых нагрузка однородна. Для каждого участка составляют общее выражение с целью определения поперечной силы и изгибающего момента. Задавая аргументу произвольное значение в пределах участка, определяют значения Q и M и строят эпюры.

Для простейших случаев нагружения эпюры Q и M представлены на рисунке 6.5 а–е.

6.2 Нормальные и касательные напряжения при чистом и прямом поперечном изгибе

При изгибе величина нормальных напряжений зависит от значений изгибающего момента, а величина касательных напряжений – от показателя поперечной силы.

Изгибающий момент и поперечную силу в любом сечении балки определяют с помощью эпюр. При расчетах на прочность большое значение имеет распределение нормальных и касательных напряжений по сечению. Касательные напряжения в большинстве случаев не оказывают существенного влияния на прочность изогнутых балок, поэтому сечения для них обычно рассчитывают по изгибающему моменту. Для балки постоянного сечения наиболее нагруженным является сечение, в котором действует максимальный момент. Оно называется опасным и выбирается в качестве расчетного.

Если подвергнуть чистому изгибу балку, то можно обнаружить следующее: одни волокна укорачиваются, другие удлиняются, а в средней по высоте части бруса находится слой волокон, который не будет изменять длину – нейтральный слой. Линия поперечных пересечений нейтрального слоя бруса называется нейтральной осью (рисунок 6.6).

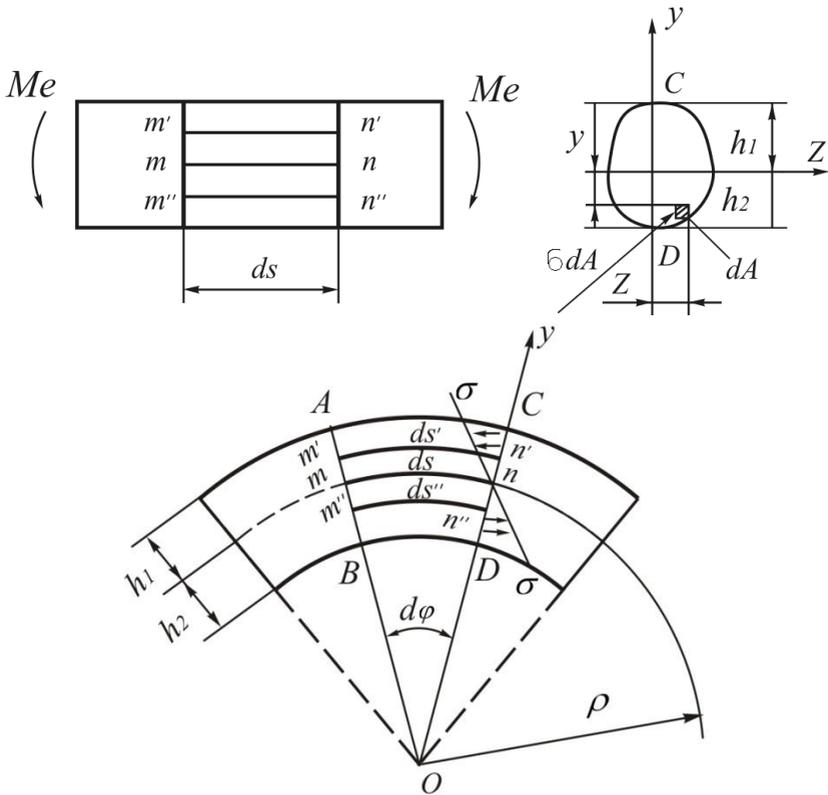


Рисунок 6.6 – К определению чистого изгиба балки

Из вышеизложенного следует, что волокна балки деформируются по-разному: большие деформации испытывают волокна, более удаленные от нейтрального слоя.

Выделяют элемент балки, ограниченный двумя поперечными сечениями, находящимися на бесконечно малом расстоянии ds друг от друга. При изгибе сечения AB и CD поворачиваются вокруг нейтральных осей, проходящих через точки m, n , и, заняв положение AB и CD , образуют угол $d\varphi$. Волокно mn , принадлежащее нейтральному слою, сохраняет свою первоначальную длину ds , а длина волокна $m'n'$,

находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя, принимает новое значение ds' . Радиус кривизны ρ элементарной дуги изогнутой оси балки можно считать постоянным. Тогда:

$$ds = \rho d\varphi; \quad ds' = (\rho + y) d\varphi.$$

Относительное удлинение волокна определяют как:

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

По закону Гука напряжение в слое, отстоящем на расстоянии y от нейтральной оси, равно:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y.$$

Следовательно, нормальные напряжения в поперечном сечении изогнутой балки прямо пропорциональны расстояниям от рассматриваемых точек до нейтральной оси. Наибольшие напряжения будут у верхнего и нижнего краев сечения.

На выделенный элемент $ABCD$ действуют со стороны правой части балки распределенные по сечению CD силы

$$dN = \sigma dA = \frac{Ey}{\rho} dA,$$

где dA – элементарная площадка, расположенная на расстоянии y от нейтральной оси z .

Эта система элементарных сил эквивалентна системе внешних сил, действующих на правую часть балки. При выбранной системе осей получают:

$$\sum x = 0; \quad \sum x = \sum dN = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int y dA;$$

$$\sum M_z = -\sum y dN = -\int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = -\frac{E}{\rho} \int y^2 dA = -M,$$

где $\int_A y dA = S_z$ – статический момент сечения относительно нейтральной оси;

$\frac{E}{\rho} \int y^2 dA = I_z$ – момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси.

Так как $\frac{E}{\rho} \neq 0$, то $S_z = 0$. Кроме того,

$$\frac{EI_z}{\rho} = M. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) можно записать в виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}.$$

$\frac{1}{\rho}$ – кривизна изогнутой оси балки и характеризует величину деформации при изгибе.

Жесткость при изгибе EI_z — характеризует способность балки сопротивляться воздействию изгибающего момента,

тогда
$$\sigma = Ey \frac{M}{EI_z} = \frac{My}{I_z}. \quad (6.5)$$

С учетом полученной зависимости (6.5) можно определить нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения балки по известному изгибающему моменту и моменту инерции сечения.

Проверку прочности и подбор сечения балок при поперечном изгибе производят, исходя из условия, чтобы наибольшие нормальные напряжения в поперечных сечениях не превосходили установленных нормами или опытом проектирования допускаемых напряжений, то есть:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}.$$

Отношение момента инерции к расстоянию y_{\max} , т. е. $\frac{I_z}{y_{\max}} = W$, называется осевым моментом сопротивления сечения при изгибе. Он является геометрической характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее прочность при изгибе.

Наибольшие растягивающие напряжения при изгибе с учетом $h_1 = h_t$ будут

$$\max \sigma_t = \frac{M h_t}{I_x}.$$

Наибольшее сжимающее напряжение по абсолютному значению при $h_2 = h_c$:

$$\max \sigma_c = \frac{M h_c}{I_x}.$$

Для балок из материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, следует применять сечение, симметричное относительно нейтральной оси, при этом условие прочности имеет вид:

$$\sigma = \frac{M}{W_z} \leq \sigma_{\text{adm}}. \quad (6.6)$$

Значения моментов сопротивления прокатных профилей приведены в таблицах сортамента. Значения W_z для простейших сечений:

прямоугольника $W_z = \frac{2I_z}{h} = \frac{bh^3}{12h/2} = \frac{bh^2}{6};$

круга $W_z = \frac{2I_z}{d} = \frac{\pi d^4}{64d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$

кольца $W_z = \frac{2I_z}{d} = \frac{\pi(d^4 - d_{\text{вн}}^4)}{32d} \approx 0,1 \frac{d^4 - d_{\text{вн}}^4}{d}.$

где d – внешний диаметр кольца,
 $d_{\text{вн}}$ – внутренний диаметр кольца.

При заданной длине балки объем затраченного материала прямо пропорционален площади поперечного сечения. Следовательно, чем больше W_z и меньше A , тем более рациональна форма сечения балки. Для ее выбора из уравнения (6.6) получают зависимость:

$$W_z \geq \frac{M}{\sigma_{\text{adm}}}.$$

При изгибе, когда поперечная сила не равна нулю, в поперечных сечениях балки, наряду с нормальными, возникают касательные напряжения. В общем случае максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{bI_z},$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

S_{\max} – статический момент всей части сечения, расположенный по одну из сторон от нейтральной оси;

b – ширина сечения;

I_z – момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

Таким образом, элемент на нейтральном слое не испытывает действия нормальных напряжений ($\sigma = 0$), касательные напряжения достигают максимальных значений.

Эксплуатация изогнутых балок показывает, что наиболее опасной, определяющей работоспособность конструкции является точка, расположенная на крайних растянутых волокнах. Следовательно, основным уравнением, по которому проверяют прочность или определяют размеры сечения, является

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma].$$

6.3 Расчеты на прочность. Потенциальная энергия деформации балки

При поперечном изгибе максимальные нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения. На этой оси нормальные напряжения равны нулю, тогда как зона действия наибольших касательных напряжений расположена, наоборот, вблизи нейтральной оси.

Кроме того, величина τ_{\max} мала по сравнению с σ_{\max} , если длина балки существенно больше высоты сечения. Это позволяет не принимать во внимание касательные напряжения и проводить расчет на прочность только по нормальным напряжениям (для тонкостенных балок это не всегда справедливо).

Условие прочности балки предусматривает, чтобы максимальные нормальные напряжения не превышали значения допускаемых напряжений для материала балки

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{I_z} \cdot y_{\max} \leq [\sigma], \quad (6.7)$$

где $[\sigma] = \sigma_T / n$ или $[\sigma] = \sigma_B / n$.

Если материал одинаково работает на растяжение и сжатие, то опасной будет точка сечения, в которой действует наибольшее по абсолютной величине напряжение. Для хрупких материалов, имеющих существенно различные пределы прочности при растяжении σ_B^p и сжатии $\sigma_B^{сж}$, требуется проверка прочности по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям

$$\sigma_p = \frac{M_{z\max}}{I_z} \cdot y_p \leq [\sigma]^p,$$

$$\sigma_{сж} = \frac{M_{z\max}}{I_z} \cdot y_{сж} \leq [\sigma]^{сж},$$

Для балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, целесообразно выбирать сечения, симметричные относительно их нейтральных осей; при этом условии обеспечивается одинаковый запас прочности сечения по растянутым и сжатым волокнам.

Если, кроме условия прочности, исходить из требования **минимальной массы** балки, то наиболее **рациональным** будет

сечение, которое при заданном моменте сопротивления W_z имеет наименьшую площадь сечения F , а при заданной площади – **наибольший момент сопротивления**. Поэтому двутавровое сечение имеет существенное преимущество по сравнению с сечением.

Для материалов хрупких, обладающих различной прочностью при растяжении и сжатии, рациональным будет сечение, несимметричное относительно нейтральной оси, например тавровое, несимметричное двутавровое и т. п.

Потенциальная энергия деформации при поперечном изгибе определяется путем интегрирования общего уравнения для удельной потенциальной энергии:

$$U = \int_V \frac{\sigma_z^2}{2E} \cdot dV + \int_V \frac{\tau_{zy}^2}{2G} \cdot dV.$$

С учетом уравнения (6.7)

$$U = \int_l \frac{M_z^2(x)}{2E \cdot I_z} \cdot dx \cdot \int_F y^2 \cdot dF + \int_l \frac{Q^2(x)}{2G \cdot F} \cdot dx \cdot \int_F \frac{S_z^2 \cdot F}{I_z^2 \cdot b^2(y)} \cdot dF.$$

Интеграл по площади в первом слагаемом есть осевой момент инерции $I_z = \int_F y^2 dF$, а во втором слагаемом деление на площадь F введено для удобства записи расчетной формулы. Окончательно имеем:

$$U = \int_l \frac{M_z^2(x)}{2E \cdot I_z} \cdot dx + K \int_l \frac{Q^2(x)}{2G \cdot F} \cdot dx, \quad (6.8)$$

где безразмерный коэффициент K

$$K = \int_F \frac{S_z^2 \cdot F}{I_z^2 \cdot b^2(y)} \cdot dF$$

позволяет учитывать неравномерность распределения τ по сечению. Этот коэффициент зависит только от формы сечения. Например, для прямоугольника

$$K = \frac{b \cdot h}{\left(\frac{bh^3}{12}\right) \cdot b^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 \cdot b \cdot dy = \frac{6}{5}.$$

Расчеты показывают, что для обычных балок ($l \gg h$) второе слагаемое уравнения (6.8) во много раз меньше первого. Поэтому энергией сдвига, как правило, пренебрегают, и потенциальную энергию при изгибе балок вычисляют по формуле:

$$U = \sum_1^n \int_l \frac{M_z^2(x)}{2E \cdot I_z} \cdot dx, \quad (6.9)$$

где n – число участков балки.

При изгибе ось балки искривляется, а поперечные сечения перемещаются поступательно и поворачиваются вокруг нейтральных осей, оставаясь при этом нормальными к изогнутой продольной оси. Деформированная (изогнутая) продольная ось балки называется *упругой линией*, а поступательные перемещения сечений, равные перемещениям $y = y(x)$ их центров тяжести сечений – *прогибами балки*.

Между прогибами $y(x)$ и *углами поворота* сечений

$\Theta(x)$ существует определенная зависимость, угол поворота сечения Θ равен углу φ наклона касательной к упругой линии (Θ и φ – углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Согласно геометрическому смыслу первой производной $y' = \text{tg } \Theta$. Следовательно, $\text{tg } \Theta = \text{tg } \varphi = y'$.

В пределах упругих деформаций прогибы балок обычно значительно меньше высоты сечения h , а углы поворота Θ не превышают 0,1–0,15 рад. В этом случае связь между прогибами и углами поворота упрощается и принимает вид $\Theta = y'$.

Определяют теперь форму упругой линии. Влияние пере­резающих сил Q на прогибы балок, как правило, незначи­тельно. Поэтому с достаточной степенью точность можно принять, что при поперечном изгибе кривизна упругой линии зависит только от величины изгибающего момента M_z и жесткости EI_z

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI} \quad (6.10)$$

В то же время в неподвижной системе координат кривизна упругой линии, как и всякой плоской кривой,

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (6.11)$$

Приравнивая правые части (6.10) и (6.11) и учитывая, что правила знаков для M_z и y были приняты независимо друг от друга, получают

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \pm \frac{M_z}{EI_z}. \quad (6.12)$$

Это равенство называется *дифференциальным уравнением упругой линии*.

При малых деформациях второе слагаемое в знаменателе мало по сравнению с единицей (при $\Theta = 0,1$ рад $(y')^2 = 0,01$) и им можно пренебречь. В результате получают *приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки*

$$y'' = \pm \frac{M_z}{EI_z}. \quad (6.13)$$

Выбор знака в правой части (6.13) определяется направлением координатной оси y , так как от него зависит знак второй производной y'' . Если ось направлена вверх, то знаки y'' и M_z совпадают, и в правой части надо оставить знак плюс. Если ось направлена вниз, то знаки y'' и M_z противоположны, и это заставляет в правой части ставить знак минус.

Уравнение (6.13) справедливо только в пределах применимости закона Гука и в тех случаях, когда плоскость действия изгибающего момента M_z содержит одну из главных осей инерции сечения.

Интегрируя (6.11), находят сначала углы поворота сечений

$$y' = \Theta = \int \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} dx + C_1, \quad (6.14)$$

а после второго интегрирования – прогибы балки:

$$y = \int dx \int \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} dx + C_1 x + C_2. \quad (6.15)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий. На участках с различными аналитическими выражениями для изгибающих моментов дифференциальные уравнения упругой линии также отличаются. Интегрирование этих уравнений при n участках дает $2n$ произвольных постоянных. Для их определения к граничным условиям на опорах добавляют условия равенства прогибов и углов поворота на стыке двух смежных участков балки.

В практических расчетах нередки случаи, когда в балке, сечение которой выбрано из условия прочности, перемещения оказываются большими – превышающими установленные для них нормы. Поэтому, кроме расчета на прочность, балки должны проверяться на жесткость. Обозначив допускаемую стрелу прогиба через $[f]$, получают условие жесткости балки

$$f \leq [f]. \quad (6.16)$$

Допускаемые значения стрелы прогиба зависят от назначения конструкции и колеблются в достаточно широких пределах. Например, в строительных конструкциях допускаемые значения относительных прогибов $[f/l]$ колеблются от 1/150 до 1/400. В машиностроении допускаемый относительный прогиб обычно ограничивается 1/1000.

Определение перемещений с помощью интеграла Мора. Кроме способов расчета перемещений сечений балок, основанных на интегрировании дифференциального уравнения упругой линии, существуют более удобные для практических целей энергетические методы. Одним из них является способ

нахождения прогибов и углов поворотов сечений при упругих деформациях балок с помощью *интеграла Мора*. Этот интеграл может быть получен различными способами, в частности, исходя из условия равенства работы внешних сил A и потенциальной энергии U , накопленной в деформированной балке.

Определяют, например, прогиб в точке C оси балки, нагруженной некоторой системой внешних поперечных сил и пар. Для упрощения промежуточных выкладок представляют эту нагрузку одной сосредоточенной силой P . Обозначают через δ_{PP} прогиб балки в точке приложения силы P , а через δ_{CP} – искомый прогиб от этой силы в точке C .

При статическом приложении к балке сила P произведет работу:

$$A = \frac{P \cdot \delta_{PP}}{2}.$$

Потенциальная энергия деформации для первого состояния балки, если пренебречь влиянием перерезывающих сил Q на прогибы, может быть подсчитана по формуле:

$$U = \int_l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx. \quad (6.17)$$

Составляя баланс энергий $A = U$, получают

$$\frac{P \cdot \delta_{PP}}{2} = \int_l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx. \quad (6.18)$$

Снимают с балки заданную нагрузку и приложение статическое обеспечивают в сечении C в направлении искомого

прогиба вспомогательной силы, равной по величине единице измерения силы, например, 1Н. От этой единичной нагрузки в сечениях балки возникнут изгибающие моменты M_z^1 , а точка C в процессе деформации балки пройдет путь δ_{C1} . Баланс энергий во втором состоянии балки можно записать так

$$\frac{1 \cdot \delta_{C1}}{2} = \int_l \frac{[M_z^1(x)]^2}{2EI_z} dx. \quad (6.19)$$

Рассматривают третье состояние, когда к балке, нагруженной вспомогательной единичной силой, прикладывается заданная P . Эта нагрузка вызовет дополнительные деформации балки, причем согласно принципу независимости действия сил дополнительные прогибы будут такими же, как и в первом из рассмотренных состояний балки, когда она нагружена только силой P . Поэтому работа внешних сил, если подсчитывать ее в последовательности их приложения:

$$A = \frac{1 \cdot \delta_{C1}}{2} + \frac{P \cdot \delta_{PP}}{2} + 1 \cdot \delta_{CP}. \quad (6.20)$$

У последнего слагаемого множитель $1/2$ отсутствует потому, что к моменту приложения заданной нагрузки единичная сила достигла своего конечного значения и в процессе перемещения δ_{CP} не изменяет своей величины.

Изгибающие моменты в сечениях балки в ее третьем состоянии равны суммам изгибающих моментов M_z от заданных нагрузок и M_z^1 от единичной силы, а потенциальная энергия деформации:

$$U = \int_l \frac{[M_z(x) + M_z^1(x)]^2}{2EI_z} dx = \int_l \frac{[M_z(x)]^2}{2EI_z} dx + \int_l \frac{M_z(x) + M_z^1(x)}{EI_z} dx + \int_l \frac{[M_z^1(x)]^2}{2EI_z} dx.$$

Баланс энергий в третьем состоянии

$$\frac{1 \cdot \delta_{C1}}{2} + \frac{P \cdot \delta_{PP}}{2} + 1 \cdot \delta_{CP} = \int_l \frac{[M_z(x)]^2}{2EI_z} dx + \int_l \frac{M_z(x) + M_z^1(x)}{EI_z} dx + \int_l \frac{[M_z^1(x)]^2}{2EI_z} dx.$$

Учитывая выражения для балансов энергий в первом и втором состояниях, получают

$$1 \cdot \delta_{CP} = \int_l \frac{M_z(x) \cdot M_z^1(x)}{EI_z} dx. \quad (6.21)$$

Для этого чтобы левая часть равенства представляла собой непосредственно искомым прогиб балки, нужно разделить обе части этого равенства на вспомогательную единичную силу или считать ее безразмерной. В обоих случаях для определения прогибов балки получают выражение

$$\delta_{CP} = \int_l \frac{M_z(x) \cdot M_z^1(x)}{EI_z} dx, \quad (6.22)$$

где M_z^1 – размерность длины.

Задача определения угла поворота сечения C приводит к тому же выражению (6.22). Отличие заключается в том, что в этом случае в сечении C надо прикладывать в направлении искомого углового перемещения единичный момент, а под δ_{CP} понимают угол поворота сечения в радианах.

В выражении (6.20) интеграл должен быть распространен на всю длину балки. Если она имеет n участков с различными аналитическими выражениями для изгибающих моментов

$M_z(x)$ и $M_z^1(x)$, то в правой части будет стоять сумма интегралов по всем n участкам.

Прогибы и углы поворотов сечений балок могут быть найдены из равенства, называемого *интегралом Мора*

$$\delta_{CP} = \sum_{l=1}^n \int \frac{M_z(x) \cdot M_z^1(x)}{EI_z} dx, \quad (6.23)$$

где $M_z(x)$ – изгибающий момент в текущем сечении балки от заданной нагрузки;

$M_z^1(x)$ – изгибающий момент в том же сечении от единичной силы, если определяют прогиб, и единичного момента, если рассчитывают угол поворота сечения.

Для определения $M_z^1(x)$ надо снять с балки заданную нагрузку (но не удалять опоры) и приложить в том сечении, перемещение которого ищется, в направлении этого перемещения единичную силу или пару. Моменты $M_z(x)$ и $M_z^1(x)$ надо подставлять в интеграл Мора с их знаками. Положительный знак в окончательном выражении обозначает, что сечение перемещается по направлению приложенной единичной нагрузки, а отрицательный знак показывает, что перемещение происходит в противоположном направлении.

В 1924 г. **А. Н. Верещагин**, являясь студентом второго курса Петербургского института путей сообщения, *предложил* простой графоаналитический прием вычисления интеграла Мора в случаях, когда эпюра $M_z^1(x)$ или $M_z(x)$ ограничена прямыми линиями. По существу это прием графоаналитического вычисления определенного интеграла в результате от произведения двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$,

из которых одна, например $\varphi(x)$, линейная, т. е. имеет вид

$$\varphi(x) = kx + b.$$

Рассмотрим участок балки, в пределах которого эпюра изгибающих моментов от единичной нагрузки ограничена одной прямой линией $M_z^1 = kx + b$, а изгибающий момент от заданной нагрузки изменяется по некоторому произвольному закону M_z .

Тогда в пределах этого участка:

$$\int_l M_z(x) \cdot M_z^1(x) dx = \int_l M_z(x) \cdot (kx + b) dx = k \int_l x \cdot M_z(x) dx + b \int_l M_z(x) dx.$$

Второй интеграл представляет собой площадь ω эпюры M_z на рассматриваемом участке, а первый – статический момент этой площади относительно оси y , поэтому он равен произведению площади ω на координату ее центра тяжести x_c . Таким образом,

$$\int_l M_z(x) \cdot M_z^1(x) dx = \omega \cdot (kx_c + b)$$

где $kx_c + b$ – ордината y_c эпюры M_z^1 под центром тяжести площади ω . Следовательно,

$$\int_l M_z(x) \cdot M_z^1(x) dx = \omega \cdot y_c. \quad (6.24)$$

Произведение ωy_c будет положительным, когда ω и y_c расположены по одну сторону от оси эпюры, и отрицательным, если они находятся по разные стороны от этой оси.

По способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади ω одной эпюры на ординату

y_c второй (обязательно линейной) эпюры, взятой под центром тяжести площади ω .

Такое «перемножение» эпюр возможно на участке, ограниченном одной прямой той эпюры, с которой начинается ордината y_c . Поэтому при вычислении перемещений сечений балок способом Верещагина **интеграл Мора** по всей длине балки надо заменить суммой интегралов по участкам, в пределах которых эпюра моментов от единичной нагрузки не имеет изломов. Тогда

$$\delta_{CP} = \sum_1^n \int_l \frac{M_z(x) \cdot M_z^1(x)}{EI_z} dx = \sum_1^n \frac{\omega \cdot y_c}{EI_z}. \quad (6.25)$$

Для успешного применения способа Верещагина необходимо иметь формулы, по которым могут быть вычислены площади ω и координаты x_c их центров тяжести. Однако более сложные эпюры изгибающих моментов допустимо разбивать на простейшие фигуры, площади ω_i и координаты y_{ci} которых известны, а затем находить произведение ωy_c для такой сложной эпюры суммированием произведений площадей ω_i ее частей на соответствующие им координаты y_{ci} .

Это объясняется тем, что разложение множимой эпюры на части равносильно представлению функции $M_z(x)$ в интеграле (6.18) в виде суммы интегралов. В некоторых случаях упрощает расчеты построение расслоенных эпюр, т. е. от каждой из внешних сил и пар в отдельности.

Если обе эпюры M_z и M_z^1 линейные, конечный результат их перемножения не зависит от того, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или, наоборот,

площадь второй на ординату первой.

Для практического вычисления перемещений по способу Верещагина надо:

1) построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (основная эпюра);

2) снять с балки заданную нагрузку (но сохранить опоры) и приложить в сечении, перемещение которого находят, в его направлении единичную силу, когда находят прогиб, или единичную пару, если искомым является угол поворота;

3) построить эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки (единичная эпюра);

4) разбить эпюры от заданных нагрузок на отдельные площади ω_i и вычислить ординаты y_{ci} единичной эпюры под центрами тяжести этих площадей;

5) составить произведение $\omega_i y_{ci}$ и просуммировать их.

Нормальные напряжения в балках, поперечные сечения которых изменяются по длине (рисунок 6.7 а), могут быть с достаточной точностью определены по формуле:

$$\sigma(x) = \frac{M_z(x)}{I_z(x)} \cdot y.$$

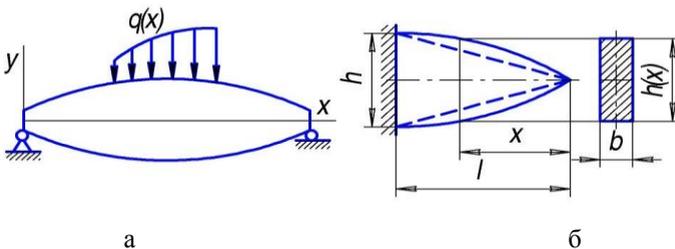


Рисунок 6.7 – Балка переменного сечения:

- а – поперечные сечения, изменяющиеся по длине балки;
б – консоль с равномерно распределенной нагрузкой

Перемещения сечений таких балок удобно вычислять *способом Мора*,

$$\delta = \sum_1^n \frac{M_z(x) \cdot M_z^1(x)}{EI_z(x)} dx, \quad (6.27)$$

где $I_z(x)$ – момент инерции текущего сечения. В балках ступенчатого сечения интеграл Мора на каждом участке с $I_z(x) = const$ может быть вычислен *способом Верещагина*, как и для балок постоянного сечения. Этот способ применим и при плавном изменении размеров сечения, если пользоваться эпюрой приведенных моментов

$$M_{np} = \frac{M_z(x)}{I_z(x)}.$$

В этом случае:

$$\delta = \sum_1^n \frac{M_z(x) \cdot M_z^1(x)}{EI_z(x)} dx = \sum_1^n \frac{\omega_{np} \cdot y_c}{E}.$$

Если при заданной нагрузке максимальные напряжения во всех сечениях одинаковы, то такие балки называют равногo сопротивления изгибу. В качестве примера определяют, по какому закону должна изменяться высота сечения h при постоянной толщине b , чтобы консоль с равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 6.7 б) представляла собой балку равногo сопротивления изгибу.

Изгибающий момент в текущем сечении консоли $M_z(x) = qx^2/2$, а момент сопротивления изгибу этого сечения $W_z(x) = bh^2(x)/6$. Следовательно, максимальное напряжение в текущем сечении:

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{3qx^2}{bh^2(x)}, \quad (6.28)$$

а в заделке

$$\sigma_{\max}(x=l) = \frac{3ql^2}{bh^2}. \quad (6.29)$$

Приравнивая правые части выражений (6.28) – (6.29), находят: $h(x) = \frac{h}{l} \cdot x$, то есть высота сечения должна меняться по линейному закону.

Контрольные вопросы

1. Что называется плоским изгибом и под действием каких внешних усилий возникает эта деформация?
2. Какие внутренние силовые факторы возникают под воздействием внешней нагрузки при поперечном изгибе и как они определяются?
3. Какие зависимости существуют между внутренними силовыми факторами при изгибе и интенсивностью распределенной нагрузки?
4. Как определяется расчетное сечение балки при деформации изгиба?
5. Условие прочности балки при изгибе.
6. От каких параметров оно зависит?
7. Каким образом производится оценка рационального сечения балки при изгибе?
8. По какой формуле определяют нормальные напряжения при чистом изгибе в любой точке балки?
9. Какая геометрическая характеристика сечения определяет прочность по нормальным напряжениям при изгибе?
10. Какие точки поперечного сечения оказываются опасными по нормальным напряжениям при плоском изгибе?

11. Записать формулы осевых моментов сопротивления для балок прямоугольного, круглого и кольцевого поперечных сечений.

12. Какая форма поперечного сечения балки при плоском изгибе является рациональной?

13. Как можно оценить рациональность сечения?

14. Запишите условия прочности по нормальным напряжениям для балки, поперечное сечение которой моносимметричное, при плоском поперечном изгибе.

15. Какие виды нагрузок могут действовать на балку?

16. Какие виды опор встречаются при расчете балок? Чем они отличаются?

17. Сколько кинематических ограничений накладывает плоская шарнирно-подвижная связь?

18. Как изображают на расчетной схеме шарнирно-подвижную связь?

19. Что представляет собой реакция шарнирно-подвижной связи?

20. Сколько кинематических ограничений накладывает плоская шарнирно неподвижная связь?

21. Как изображают на расчетной схеме шарнирно-неподвижную связь?

22. Что представляет собой реакция шарнирно-неподвижной связи?

23. Сколько кинематических ограничений накладывает плоская скользящая заделка?

24. Как изображают на расчетной схеме скользящую заделку?

25. Что представляет собой реакция скользящей заделки?

26. Сколько кинематических ограничений накладывает защемление?

27. Как изображают на расчетной схеме защемление?

ГЛАВА 7. КРУЧЕНИЕ

7.1 Внутренние силовые факторы. Кручения стержня круглого и кольцевого поперечных сечений

Кручением называют деформации брусьев парами сил, приложенных в плоскости, перпендикулярной оси бруса. Момент пары называют крутящим.

Моменты относительно оси бруса могут создавать только внутренние касательные силы, так как нормальные силы параллельны этой оси бруса и, следовательно, не обеспечивают моменты относительно этой оси.

На элементарной площадке dA (рисунок 7.1), выделенной из площади поперечного сечения, возникает напряжение τ . Соответствующая ему сила равна $\tau \cdot dA$, а момент этой силы относительно оси бруса $dM_z = (\tau \cdot dA)r$. Если просуммировать (проинтегрировать) это выражение по всей площади поперечного сечения бруса, то получают крутящий момент:

$$T = M_z = \int_A (\tau \cdot dA)r. \quad (7.1)$$

Таким образом, крутящий момент представляет собой результирующий момент относительно оси бруса внутренних касательных сил, возникающих в его поперечном сечении.

Крутящий момент определяют методом сечений. Величина крутящего момента T в произвольном поперечном сечении бруса равна алгебраической сумме моментов всех внешних пар сил, действующих относительно геометрической оси стержня по одну сторону от рассматриваемого сечения. Закон изменения крутящих моментов по длине бруса принято представлять в виде эпюры. *Для крутящего момента это*

диаграмма, изображающая изменение крутящего момента в поперечных сечениях по длине вала.

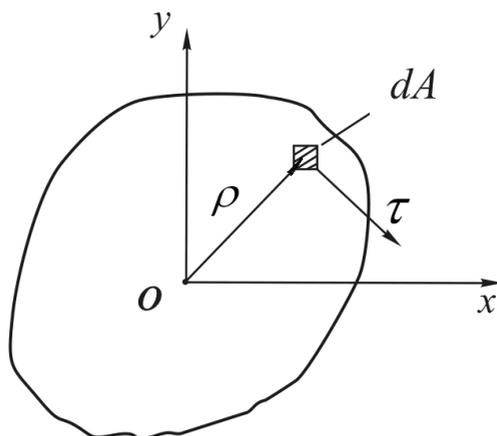


Рисунок 7.1 – К выделению элементарной площадки dA

Крутящий момент в сечении $a - a$ считается положительным, когда внешний момент вращает отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на нее со стороны сечения. Если внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке (со стороны сечения), то крутящий момент в нем считается отрицательным.

Эпюра крутящих моментов для бруса показана на рисунке 7.2.

Реактивный момент в заделке T_p , условно показанный штриховой линией, T_p численно равен сумме внешних активных моментов и направлен противоположно результирующему внешнему моменту. При построении эпюр крутящих моментов делают ряд сечений и рассматривают отсеченные части:

$$T_p = \sum T \text{ при } T_3 > T_1 + T_2;$$

$$T_{\text{I}} = T_1; \quad T_{\text{II}} = T_1 + T_2; \quad T_{\text{III}} = T_1 + T_2 - T_3.$$

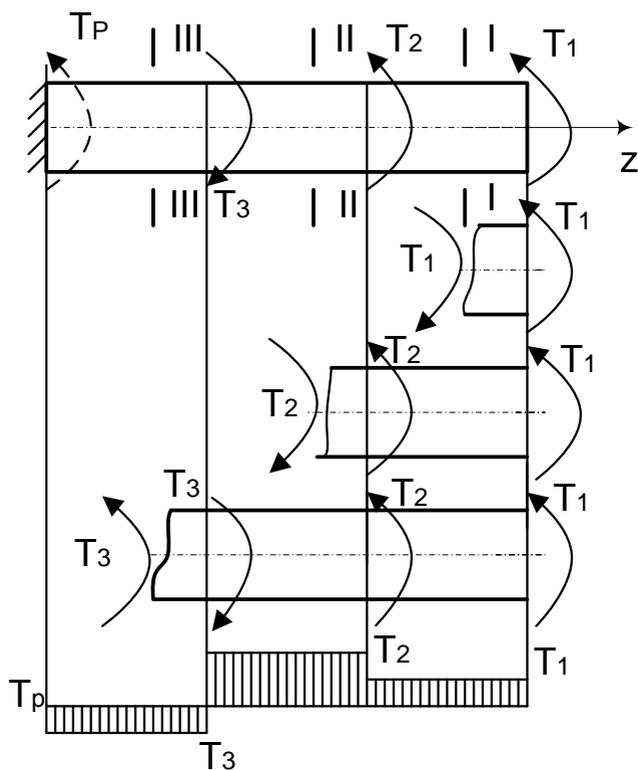


Рисунок 7.2 – Эпюра крутящих моментов для бруса

Эпюра крутящих моментов имеет форму прямоугольников, в местах приложения внешних моментов ее ординаты скачкообразно изменяются на величину приложенного внешнего момента.

Цилиндр (вал) может быть расположен на опорах, между которыми закреплены два зубчатых колеса B и C , на которые действуют моменты T_2 и T_3 , а на конце вала находится

полумуфта A , к которой приложен крутящий момент T_1 , развиваемый двигателем (рисунок 7.3).

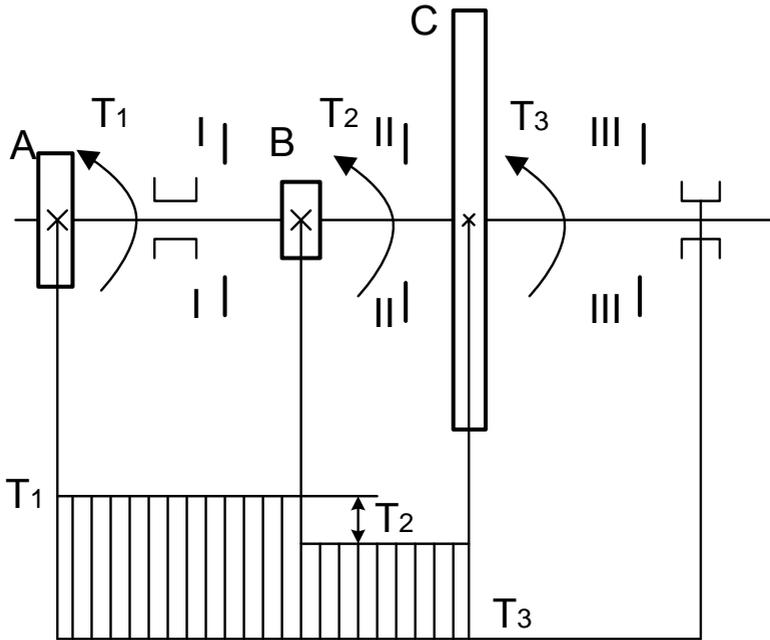


Рисунок 7.3 – К построению эпюры крутящих моментов

При равномерном вращении вала, пренебрегая сопротивлением в подшипниках, имеем:

$$T_1 + T_2 - T_3 = 0.$$

Если рассматривать равновесия правой части, то момент в сечении I должен уравновесить моменты T_2 и T_3 или $T_I = T_2 + T_3$.

Аналогично получают момент в сечении II на участке вала AB .

Из равновесия левой части:

$$T_{II} = T_1 - T_2.$$

С учетом равновесия правой части в том же сечении:

$$T_{II} = T_3.$$

В сечении III крутящий момент равен:

$$T = T_1 - T_2 - T_3 = 0.$$

Вращающиеся и работающие на кручение стержни называются валами. Если на поверхность вала круглого сечения нанести прямоугольную сетку, то после деформации окажется (рисунок 7.4):

1) прямоугольная сетка превратилась в параллелограммную, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в поперечных сечениях;

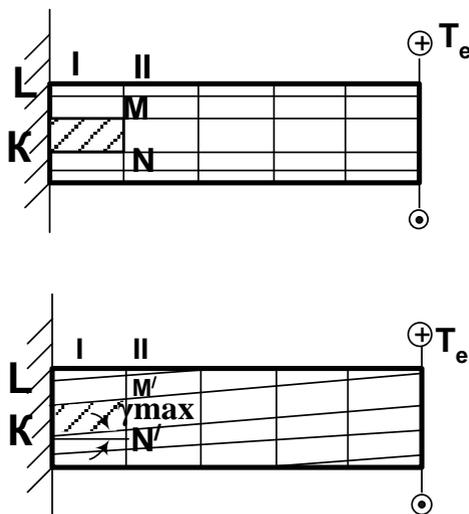


Рисунок 7.4 – Кручение вала круглого сечения

2) расстояние между сечениями, например между I и II, не изменяется, как длина стержня и его диаметр, т. е. каждое поперечное сечение поворачивается относительно в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое (гипотеза плоских и жестких сечений).

Из нагруженного тела выделяют элемент, ограниченный двумя смежными сечениями I и II радиусом ρ в виде диска толщиной dz (рисунок 7.5). У поверхности элемента можно рассмотреть элементарный прямоугольник $abcd$. В результате действия внешнего момента T возникает деформация кручения. Выделенный элементарный прямоугольник испытывает деформацию сдвига, при этом aa' – абсолютный сдвиг и $\frac{aa'}{dz} = \operatorname{tg}\gamma = \gamma$ – относительный сдвиг (угол сдвига).

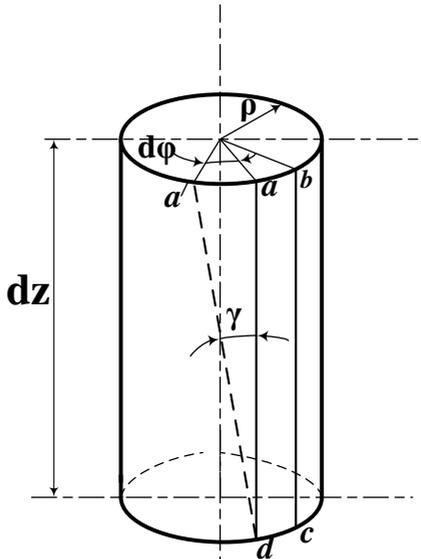


Рисунок 7.5 – Элемент, выделенный из нагруженного тела и ограниченный двумя смежными сечениями

Из рисунка 7.5 следует, что $aa' = \rho d\varphi$, тогда

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho,$$

где $d\varphi$ – угол закручивания;

dz – элемент длины.

В соответствии с законом Гука при сдвиге можно записать:

$$\tau = \gamma G = \rho \frac{d\varphi}{dz} G. \quad (7.2)$$

Из выражения (7.2) следует, что касательные напряжения по сечению изменяются линейно от нуля в центре сечения до максимальных у поверхности бруса (рисунок 7.6).

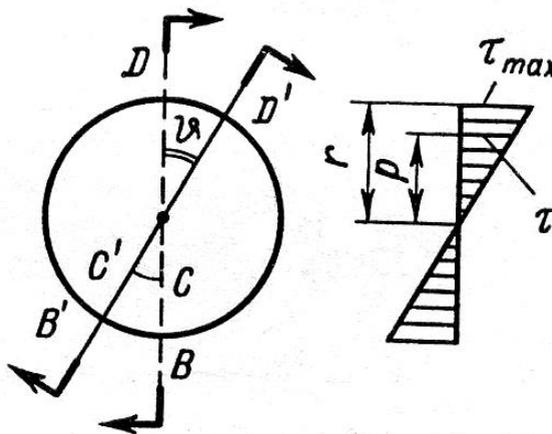


Рисунок 7.6 – К определению касательного напряжения

Подставив в выражение (7.1) значение τ из выражения (7.2) получим:

$$T = M_z = \int_A \rho^2 \frac{d\varphi}{dz} G dA = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA.$$

Необходимо учитывать, что:

$$\int_A \rho^2 dA = I_p,$$

где получают I_p – полярный момент инерции сечения:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GI_p}.$$

Подставив значение $\frac{d\varphi}{dz}$ в формулу (7.2), имеем:

$$\tau = \frac{T\rho}{I_p}.$$

Как видно из формулы (7.2), в точках, одинаково удаленных от центра сечения, напряжения τ неизменны.

Наибольшие напряжения в точках у контура сечения определяют по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{T\rho_{\max}}{I_p} = \frac{T}{W_p},$$

где $W_p = \frac{I_p}{r}$.

Геометрическая характеристика W_p называется полярным моментом сопротивления (или моментом сопротивления при кручении).

Для круглого сплошного сечения

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32 \frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

Для кольцевого сечения

$$W_p = \frac{2I_p}{d} = \frac{\pi(d^4 - d_{\text{вн}}^4)}{16d} \approx 0,2 \frac{d^4 - d_{\text{вн}}^4}{d}.$$

где d – внешний диаметр кольца;

$d_{\text{вн}}$ – внутренний диаметр кольца.

Условие статической прочности вала при кручении имеет вид:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T}{W_p} \leq \tau_{\text{adm}} \quad (7.3)$$

где τ_{adm} – допускаемое касательное напряжение, равное:

$$\tau_{\text{adm}} = (0,5 \div 0,6) \sigma_{\text{adm}}.$$

Полный угол поворота Φ одного сечения относительно другого, отстоящего от него на расстоянии l , получим, интегрируя выражение

$$d\Phi = \frac{Tdz}{GI_p}$$

до l , то есть:

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}.$$

Произведение GI_p называется жесткостью бруса при кручении.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют относительным углом закручивания. Он равен:

$$\gamma = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p}.$$

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания не превосходил допустимый, то есть:

$$\gamma = \frac{T}{GI_p} = \gamma_{\text{adm}}. \quad (7.4)$$

Расчет валов при кручении производят на прочность и жесткость. Проверка прочности и жесткости при кручении производится, соответственно, по формулам (7.3) и (7.4).

Кроме проверки прочности по формуле (7.3), для круглого сечения можно определить:

диаметр вала $d \geq 3 \sqrt[3]{\frac{T}{0,2\tau_{\text{adm}}}}$

или допускаемый крутящий момент

$$T_{\text{adm}} = W_p \tau_{\text{adm}}.$$

Из условия жесткости диаметр вала сплошного круглого сечения $I_p \approx 0,1d^4$, поэтому:

$$d \geq 4 \sqrt{\frac{180T}{\pi G \cdot 0,1\gamma_{\text{adm}}}}$$

7.2 Дифференциальные и интегральные зависимости при кручении, техника построения эпюр для стержня

Брус, жестко заделанный обоими концами (рисунок 7.7), статически неопределим, так как уравнение равновесия одно ($\sum m_z = 0$), а неизвестных – два реактивных скручивающих момента, возникающих в заделках. Отбросив одну заделку, заменяют ее действие неизвестным моментом X . Дополнительное уравнение деформации получают из условия, что угол поворота сечения у отброшенной заделки, равный углу закручивания бруса под действием моментов T и X , равен нулю ($\varphi = 0$).

Угол поворота сечения B под действием момента X равен:

$$\varphi'_B = \frac{Xa}{GI'_p} + \frac{Xb}{GI''_p},$$

где $I'_p \approx 0,4d_1^4$;

$$I''_p \approx 0,4d_2^4.$$

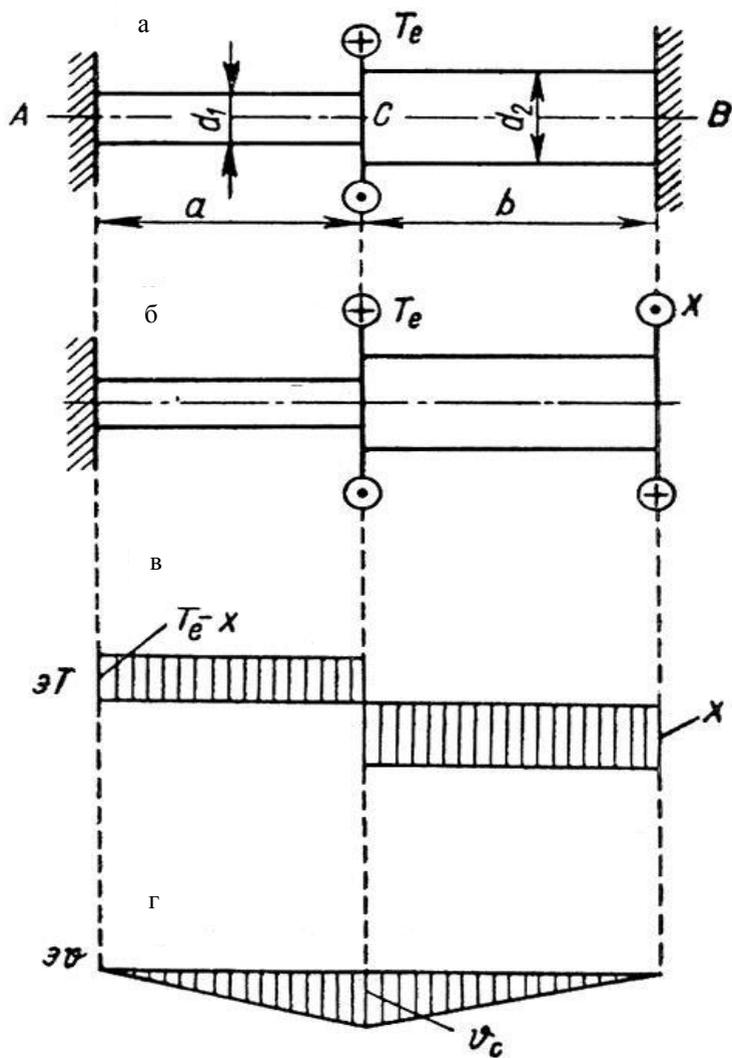


Рисунок 7.7 – Брус, жестко заделанный обоими концами:

а – расчетная схема; б – направление моментов; в – эпюра момента;
 г – эпюра углов закручивания

Угол поворота сечения B под действием момента T_e определяют по формуле

$$\varphi_B'' = \frac{T_e a}{GI_p'}$$

Подставляя эти значения в уравнение перемещений, получают

$$\varphi_B = 0; \quad \frac{Xa}{GI_p'} + \frac{Xb}{GI_p''} - \frac{T_e a}{GI_p'} = 0.$$

Отсюда определяют X .

После этого можно установить крутящий момент в любом сечении и построить эпюры крутящих моментов (T) и углов закручивания (φ). Для построения эпюры φ достаточно вычислить угол поворота сечения C :

$$\varphi_C = \frac{Xb}{GI_p''} = -\frac{(T_e - X)T_e a}{GI_p'}$$

Углы поворота сечений A и B равны нулю, так как они линейно зависят от расстояния, то полученные точки эпюры можно соединить прямыми линиями.

Из двух сечений с одним и тем же полярным моментом сопротивления (W_p), следовательно, с одним и тем же допустимым крутящим моментом рациональным будет выбор сечения с наименьшей площадью, т. е. обеспечивающее наименьший расход материала.

Для сравнения различных сечений применяют безразмерную величину: для круглого сечения $\omega_p = W_p / \sqrt{A^3}$; для

некруглого сечения $\Omega_t = W_t / \sqrt{A^3}$, которую называют удельным моментом сопротивления при кручении. Чем больше Ω_t , тем более рационально сечение.

Наименее выгодными при кручении являются швеллеры, двутавры узкие, прямоугольные сечения, а наиболее выгодными – круглые, кольцевые сечения, особенно при малой толщине стенки.

При подборе сечений по жесткости в качестве критерия экономичности профиля служит удельный полярный момент

инерции: для круглого сечения $j_p = \frac{I_p}{A^2}$; для некруглого

сечения $j_p = \frac{I_r}{A^2}$.

При расчете на жесткость преимущества у кольцевых тонкостенных сечений по сравнению с другими типами сечений возрастают.

7.3 Расчеты на прочность и жесткость при кручении

В механизмах различных устройств широко применяют оси и валы, на которых закрепляются вращающиеся с ними детали.

Валом называют деталь гладкой или ступенчатой цилиндрической формы, предназначенную для поддержания сидящих на ней шкивов, зубчатых колес и передачи вращающего момента. При работе вал испытывает изгиб и кручение, а в отдельных случаях – растяжение и сжатие.

Осью называют деталь, предназначенную только для поддержания сидящих на ней деталей. В отличие от вала ось не передает вращающего момента и работает только на изгиб. В машинах оси могут быть неподвижными, например, ось блока

грузоподъемной машины (рисунок 7.8 а), или могут вращаться вместе с сидящими на них деталями (подвижные оси), например, вагонная ось (рисунок 7.8 б).

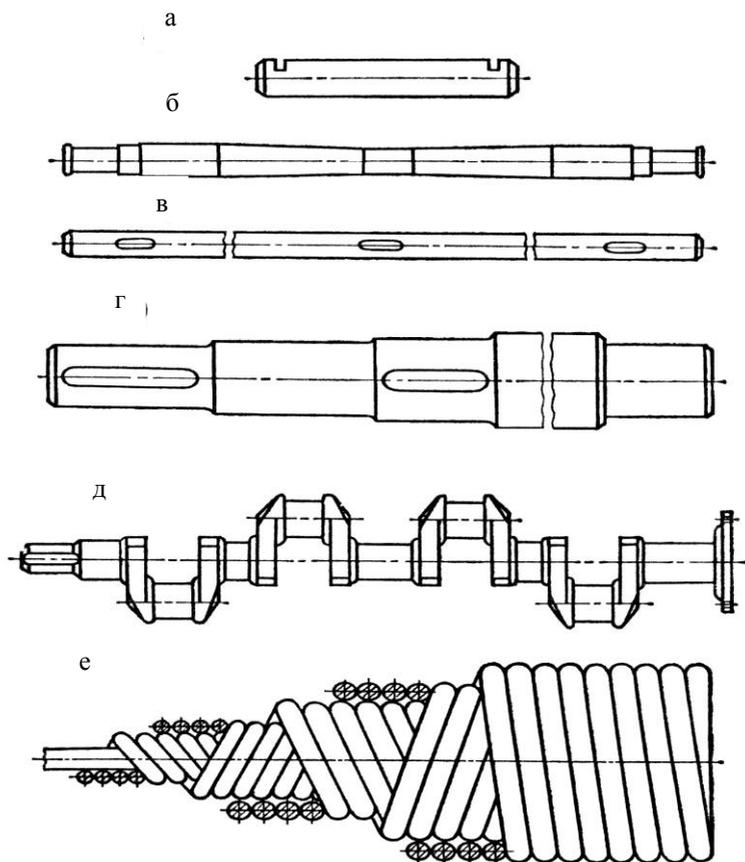


Рисунок 7.8 – К определению вала:

а – ось блока грузоподъемной машины; б – вагонная ось; в – вал прямой, одного сечения; г – вал прямой, переменного сечения; д – коленчатый вал; е – гибкий вал

По назначению различают валы передач, на которых устанавливают зубчатые колеса, звездочки, муфты и прочие

детали передач, и коренные валы, на которых устанавливают детали не только передач, но и рабочих органов машины.

Оси представляют собой прямые стержни (рисунок 7.8 а, б), а валы бывают прямые (рисунок 7.8 в, г), коленчатые (рисунок 7.8 д) и гибкие (рисунок 7.8 е).

Оси и валы в большинстве случаев имеют круглое сплошное, кольцевое и комбинированное сечение.

По конструктивным признакам валы и оси делят на гладкие и ступенчатые. Участки осей и валов, которыми они опираются на подшипники при восприятии радиальных нагрузок, называют цапфами; при восприятии осевых нагрузок – пятами.

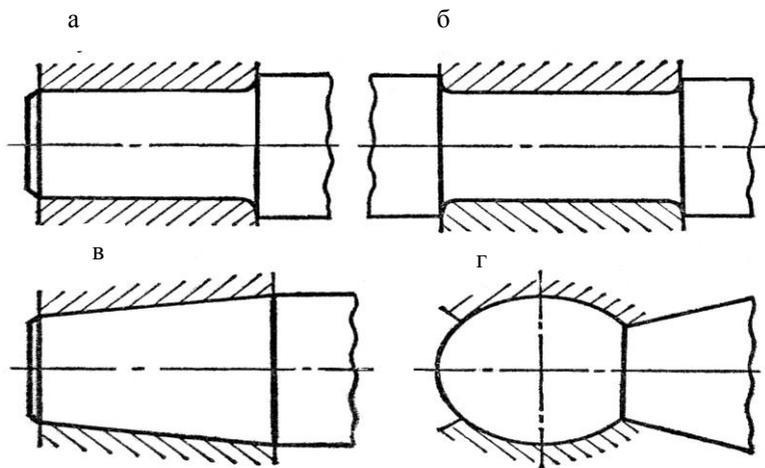


Рисунок 7.9 – К определению концевой цапфы:

а – шипы; б – шейки; в – конические; г – сферические

Концевые цапфы, работающие в подшипниках скольжения, называют шипами (рисунок 7.9 а), а цапфы, расположенные на некотором расстоянии от концов осей и валов – шейками (рисунок 7.9 б). Цапфы осей и валов, работающие в подшипниках скольжения, бывают цилиндрическими

(рисунок 7.9 а), коническими (рисунок 7.9 в) и сферическими (рисунок 7.9 г). Наиболее распространенные – цилиндрические цапфы, так как они просты, удобны и дешевы в изготовлении.

Оси и валы являются важными деталями механизмов, безотказность работы которых определяют надежность и долговечность всей механической системы. Поэтому они должны быть достаточно прочными, жесткими, износостойкими и вместе с тем простыми в изготовлении. В качестве материала для осей и валов применяют чаще всего углеродистые и легированные стали (прокат, поковки и резе стальное литье), а также высокопрочный модифицированный чугун и сплавы цветных металлов (в приборостроении). Для неотчетственных малонагруженных конструкций валов и осей используют без термической обработки углеродистые стали Ст3, Ст4, Ст5, 25, 30, 35, 40 и 45.

Оси и валы с повышенными требованиями к несущей способности и долговечности выполняют из среднеуглеродистых или легированных сталей с улучшением 35, 40, 40Х, 40ХН и др. Ответственные тяжело нагруженные валы изготавливают из легированных сталей 40 ХН, 40ХНМА, 30 ХГТ и др. В автомобильной и тракторной промышленности коленчатые валы двигателей производят из модифицированного или высококачественного чугуна.

Основные критерии работоспособности осей и валов – прочность и жесткость. В зависимости от характера напряжений, возникающих в валах и осях, возможны два случая их расчета на прочность: статическую и на усталостную (выносливость).

Усталостная прочность оценивается коэффициентом запаса прочности. Неподвижные оси при действии постоянных нагрузок рассчитывают на статическую прочность. Подвижные быстроходные оси и валы проверяют на выносливость. Тихоходные валы и оси, нагруженные переменной нагрузкой, рассчитывают на статическую прочность и выносливость.

Расчет валов и осей на статическую прочность. Оси, нагруженные только изгибающими нагрузками, рассчитывают на изгиб. После составления расчетной схемы и определения всех сил, действующих на ось, строят эпюру изгибающих моментов и по максимальному их значению рассчитывают ось.

На статическую прочность при изгибе ведется расчет осей:

$$\text{– проверочный} \quad \sigma_{\text{и}} = M / 0,1d^3 \leq [\sigma_{\text{и}}] , \quad (7.5)$$

$$\text{– проектировочный} \quad d = \sqrt[3]{10M / [\sigma_{\text{и}}]} , \quad (7.6)$$

где $\sigma_{\text{и}}$ – расчетное напряжение в опасном сечении оси;

M – изгибающий момент в опасном сечении оси;

$0,1d^3$ – момент сопротивления изгибу сечения оси;

d – диаметр оси; $[\sigma_{\text{и}}]$ – допускаемое напряжение на изгиб.

Проектирование вала начинают с определения диаметра его выходного конца из расчета на чистое кручение по пониженному допускаемому напряжению, без учета влияния изгиба:

$$d \geq \sqrt[3]{T / 0,2[\tau_{\text{к}}]} , \quad (7.7)$$

где T – крутящий момент, Н·мм;

$[\tau_{\text{к}}]$ – допускаемое напряжение на кручение, для сталь-

ных валов $[\tau_{\text{к}}] = (20 \div 30)$ МПа.

Полученный результат округляют до ближайшего большего значения из стандартного ряда.

На основании разработанных схем рассчитывают параметры валов на статическую прочность при одновременном действии изгиба и кручения. Для этого силы, действующие на вал в разных плоскостях, раскладывают по двум взаимно перпендикулярным плоскостям, в которых определяют опорные реакции и изгибающие моменты. Суммарный изгибающий момент равен:

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

где M_x и M_y – изгибающие моменты во взаимно перпендикулярных плоскостях в выбранном сечении вала.

Приведенный или эквивалентный момент вычисляют по третьей теории прочности:

$$M_{\text{эКВ}} = \sqrt{M^2 + T^2}. \quad (7.8)$$

На совместное действие изгиба и кручения ведется расчет вала:

– проверочный $\sigma_{\text{эКВ}} = M_{\text{эКВ}} / 0,1d^3 \leq [\sigma_{\text{и}}]$, (7.9)

– проектировочный $d = \sqrt[3]{M_{\text{эКВ}} / [\sigma_{\text{и}}]}$, (7.10)

где $\sigma_{\text{эКВ}}$ – приведенное (эквивалентное) напряжение для расчетного сечения вала;

d – диаметр вала;

$0,1d^3$ – момент сопротивления сечения вала при изгибе;

$[\sigma_{\text{и}}]$ – допускаемое напряжение на изгиб, для стальных валов и осей с термической обработкой $[\sigma_{\text{и}}] = (70 \div 80)$ МПа.

Проверочный (уточненный) расчет валов и осей на усталостную прочность выполняется, когда известны конструкция и размеры вала, расположение и виды концентраторов напряжений, опор и деталей, построены эпюры моментов и т. п. Расчет сводится к определению коэффициента безопасности в опасных сечениях вала по условию:

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}} \geq [S] , \quad (7.11)$$

где S_σ – коэффициент безопасности по изгибу, определяемый как:

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1} K_L}{\frac{K_\sigma}{\beta \epsilon_\sigma} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} ;$$

S_τ – коэффициент безопасности по кручению, равный:

$$S_\tau = \frac{\tau_{-1} K_L}{\frac{K_\tau}{\beta \epsilon_\tau} \tau_a + \psi_\tau \tau_m}$$

где σ_a и τ_a – переменные составляющие циклов изменения напряжений;

σ_m и τ_m – постоянные составляющие циклов изменения напряжений;

σ_{-1} и τ_{-1} – пределы выносливости при изгибе и кручении при симметричном знакопеременном цикле;

ϵ_σ и ϵ_τ – масштабный фактор;

K_σ и K_τ – эффективные коэффициенты напряжений при изгибе и кручении;

$\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma}$ – коэффициент, учитывающий влияние посадки деталей на вал при изгибе;

$\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau}$ – то же при кручении,

$$\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau} = 1 = 0,6 \left(\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} - 1 \right);$$

β – коэффициент упрочнения, вводится для валов с поверхностным упрочнением;

Ψ_σ и Ψ_τ – коэффициенты, характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла изменения напряжений.

Постоянные циклов изменения напряжения σ_m и τ_m (средние напряжения циклов) и переменные составляющие σ_a и τ_a (амплитуды) цикла определяют по зависимостям:

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_F = \frac{M}{W};$$

$$\tau_m = \tau_a = \frac{1}{2} \tau = \frac{1}{2} \frac{T}{W_p}.$$

Если вал реверсируется, то:

$$\tau_m = 0; \quad \tau_a = \frac{T}{W_p}.$$

Момент сопротивления вала W и полярный момент сопротивления W_p определяются по формулам:

– для сплошного вала

$$W = 0,1d^3; \quad W_p = 0,2d^3; \quad W_p = 2W;$$

– для сечения вала со шпонкой

$$W = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt_1(d-t_1)^2}{2d};$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt_1(d-t_1)^2}{2d}.$$

Расчет осей и валов на жесткость. Валы и оси, рассчитанные на статическую или усталостную прочность, не всегда обеспечивают нормальную работу машины. Под действием нагрузок валы и оси в процессе работы деформируются и получают линейные f и угловые θ перемещения (рисунок 7.10). Это, в свою очередь, ухудшает работоспособность отдельных узлов и машин. Например, значительный прогиб f вала электродвигателя, с одной стороны, уменьшает, а, с другой – увеличивает зазор между ротором и статором, что отрицательно сказывается на его работе. Угловые перемещения θ вала или оси ухудшают работу подшипников, точность зацепления передач и т. п. Для обеспечения требуемой жесткости вала или оси необходимо производить расчет на изгибную или крутильную жесткость.

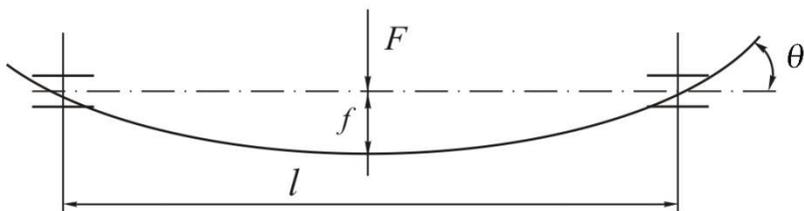


Рисунок 7.10 – К определению перемещения

С целью обеспечения жесткости на изгиб осей или вала необходимо, чтобы действительные значения θ и f не превышали допусковых:

$$\theta \leq [\theta] , \quad f \leq [f] .$$

Для большинства валов жесткость на кручение не имеет существенного значения, поэтому такой расчет не производят. Расчет на крутильную жесткость осуществляют для длинных валов. Оси на крутильную жесткость не рассчитывают.

Условия жесткости валов на кручение записывают как:

$$\varphi = T / GI_0 \leq [\varphi] ,$$

где T – крутящий момент в расчетном сечении, Н·м;

G – модуль сдвига (для стали $G = 8 \cdot 10^4$ Н/мм²);

I_0 – полярный момент инерции (для вала круглого сплошного сечения $I_0 = 0,1d^4$).

Муфтами называют устройства для соединения валов между собой или со свободно «сидящими» на них деталями (шкивами, зубчатыми колесами и т. д.).

Для постоянного соединения валов муфты могут быть глухими (жесткими) и подвижными (компенсирующими). Глухие муфты просты в конструкции, но она предусматривает точную соосность валов.

Компенсующие муфты допускают небольшие относительные смещения валов (рисунок 7.11 а, б, в) – осевое Δx , радиальное или параллельное Δy и угловое $\Delta\alpha$ (перекос), они называются погрешностями изготовления и монтажа соединяемых элементов. Кроме того, компенсирующие муфты с упругими элементами деформируют крутильные колебания.

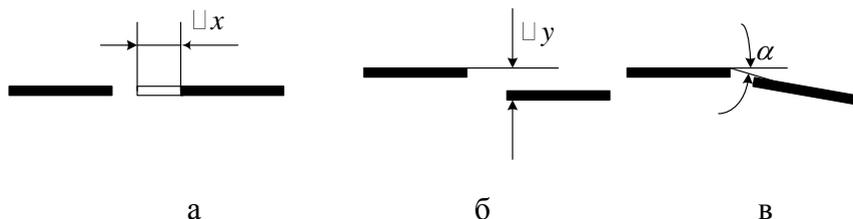


Рисунок 7.11 – Компенсирующие муфты:

а – осевое смещение; б – радиальное или параллельное смещение;
в – угловое смещение

Муфты управления применяют в управлении движением ведомого звена. Сцепные или муфты включения, предназначены для периодического хода включения и выключения ведомой ветви привода, передают движение лишь в одном определенном направлении. К муфтам управления относятся и предохранительные, способные автоматически разъединять валы, если развиваемый крутящий момент превышает определенную часть механизма от перегрузок. Особую группу муфт включения составляют электромагнитные, которые благодаря своему быстрдействию получили широкое применение в системах автоматики и ЭВМ. Отдельные виды электромагнитных муфт позволяют регулировать частоту вращения ведомого звена, а также осуществлять его торможение.

Большинство муфт нормализованы. Некоторые нестандартные муфты изготавливают по нормам завода и проектных организаций. Соответственно, размеры муфт принимают по ГОСТу или по каталогам заводов и проектных учреждений.

Основной характеристикой при подборе муфт по ГОСТу, каталогу или справочнику является передаваемый крутящий момент, учитывающий наиболее тяжелые условия их нагружения и называемый расчетным крутящим моментом:

$$T_k = KT \leq [T] ,$$

где T – крутящий момент, передаваемый муфтой при установленном режиме работы (номинальный момент);

K – коэффициент динамичности или режима работы, учитывающий дополнительные динамические нагрузки на муфту, $K = 1-6$ (значения K приведены в справочной литературе).

Так как муфты подбирают по ГОСТу или ведомственным нормам, то их расчет осуществляют как проверочный. В точной механике применяют глухие муфты для постоянного соединения валов, которые состоят из втулки 1, сопрягаемой с валом 2 по посадкам типа H/h , 7–9 квалитетом, и закрепляются посредством штифтов 3 или шпонок. Ориентировочные размеры: $D = 1,5d$, $l = (3...4)d$. Проверочный расчет проводят из условия прочности при кручении втулки:

$$\tau = \frac{T_p}{W_p} = \frac{16T_p}{\pi d^3 \left(1 - d^4 / D^4\right)} \leq [\tau] ,$$

где $T_p = T_{\max} K$ – расчетный момент;

T_{\max} – наибольший крутящий момент;

K – коэффициент режима ($K=1 - 25$);

$[\tau]$ – допускаемое напряжение на кручение,

$$[\tau] = 0,25\sigma_1.$$

Штифты втулочной муфты проверяют с помощью расчета

на срез по условию прочности:

$$\tau = \frac{4T_p}{\pi d'd} \leq [\tau_{\text{ср}}] ,$$

где $[\tau_{\text{ср}}]$ – допускаемое напряжение на срез.

Из упругих муфт широко распространена втулочно-пальцевая муфта МУВП. Ее размеры в зависимости от номинального момента нормализованы ГОСТ 21424-75 (для соединения валов диаметром 9–160 мм).

Муфта МУВП состоит из двух полумуфт, насаженных на концы соединяемых валов; стальных пальцев, закрепленных в одной из полумуфт гайками с посадкой на конце; упругих резиновых втулок. Широкое применение этой муфты в механических приводах обусловлено такими ее преимуществами, как легкость изготовления, простота упругих элементов, удобство их замены и надежность. Полумуфты изготавливают из чугуна СЧ 21–40, стали 30 или стального литья 35Л. Материал пальцев – сталь 45.

Проверочный расчет упругих элементов на смятие муфты МУВП включает:

$$\sigma_{\text{см}} = 2T_{\text{к}} / (zD_1 l d) \leq [\sigma_{\text{см}}]$$

и пальцев на изгиб:

$$\sigma_{\text{и}} = T_{\text{к}} l / (0,1d^3 zD_1) \leq [\sigma_{\text{и}}] ,$$

где $T_{\text{к}}$ – расчетный крутящий момент муфты;

D_1 – диаметр окружности расположения центров пальцев;

d – диаметр пальцев под резиновыми кольцами или

втулкой;

l – длина втулки;

z – число пальцев;

$\sigma_{см}$ – расчетное напряжение смятия между пальцами и втулкой; $[\sigma_{см}] = 2-4$ МПа – допускаемое напряжение смятия резины;

$\sigma_{и}$ – расчетное напряжение на изгиб для пальцев; $[\sigma_{и}] = 60-80$ МПа – допускаемое напряжение на изгиб для пальцев.

Контрольные вопросы

1. Что называется кручением и каким внутренним силовым фактором оно характеризуется?

2. От каких факторов зависит величина напряжения в определенной точке при кручении?

3. Что называется эпюрой крутящего момента?

4. Что называется валом?

5. Как отличаются диаметры двух валов, рассчитанных на кручение при передаче одинаковой мощности, по разным частотам вращения?

6. Как определяется абсолютный или полный угол закручивания?

7. Что называется относительным углом закручивания?

8. Что такое момент сопротивления кручению?

9. Условие прочности и жесткости валов. Какие параметры определяются из этих условий?

10. По каким критериям оцениваются рациональные формы сечений при кручении?

11. Что называется полярным моментом сопротивления и чему он равен для круга и кольца?

12. Равен ли полярный момент сопротивления кольцевого сечения разности полярных моментов сопротивления наружного и внутреннего кругов?

13. В каких площадках, проходящих через данную точку стержня круглого сечения, при кручении возникают экстремальные касательные напряжения и чему они равны?

14. В каких площадках, проходящих через данную точку стержня круглого сечения, при кручении возникают экстремальные нормальные напряжения и чему они равны?

15. Как разрушаются при кручении деревянные и чугунные брусья? Как объяснить характер разрушения для каждого из этих материалов?

16. При каком нагружении возникает кручение бруса (вала)?

17. Какой силовой фактор вызывает закручивание бруса?

18. Что такое крутящий момент?

19. Что называется валом?

20. Когда в брусе возникают деформации кручения?

21. Как определяют величину крутящего момента, действующего в сечении?

22. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого вала при кручении и как они направлены?

23. Какое напряженное состояние возникает в каждой точке вала круглого сечения при кручении?

24. В каких площадках, проходящих через рассматриваемую точку, возникают максимальные нормальные напряжения при кручении стержня?

25. В каких площадках, проходящих через рассматриваемую точку, возникают максимальные касательные напряжения при кручении стержня?

26. Каково соотношение между наибольшими нормальными и наибольшими касательными напряжениями в точке при кручении?

ГЛАВА 8. КОСОЙ ИЗГИБ И ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

8.1 Косой изгиб, напряжение в поперечном сечении, нейтральная линия

Сложным сопротивлением называется вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях одновременно возникает не менее двух внутренних силовых факторов.

Исключение составляет прямой поперечный изгиб, так как расчеты на прочность и жесткость в большинстве случаев проводятся только по изгибающему моменту без учета поперечных сил.

Все случаи с решением сложного сопротивления рассматривают с учетом из принципа независимости действия нагрузок, т. е. напряжения определяют суммированием напряжений от действия каждого силового фактора.

В конструкциях различных механизмов часто встречаются детали, работающие на совместное действие изгиба и кручения.

Характерным примером таких деталей являются валы самых разнообразных устройств.

Силы, которые передаются на вал механизма, в общем случае приводят к появлению в поперечных сечениях вала крутящего момента $M_{кр} = T$, изгибающих моментов M_y и M_z , а также поперечных сил Q_y и Q_z .

Под действием указанных силовых факторов в сечениях возникают нормальные (от изгиба) и касательные (от изгиба и кручения) напряжения. Величиной касательных напряжений от изгиба обычно пренебрегают, поскольку они незначительны по сравнению с кручением. Поэтому рассматривают кручение с чистым изгибом.

Рассмотрение вала круглого поперечного сечения. Используя принцип независимости действия сил, строят эпюры изгибающих моментов от нагрузок, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также эпюру крутящих моментов (рисунок 8.1).

Сопоставляя полученные эпюры, находят, что опасными являются сечения 1–1 и 2–2.

В каждом сечении круглого вала имеет место прямой изгиб от действия результирующего изгибающего момента:

$$M_u = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Нормальные напряжения от этого момента достигают наибольших значений в крайних волокнах вала и определяются по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}.$$

В любой точке контура поперечного сечения вала действуют в результате кручения также максимальные касательные напряжения, связанные с величиной крутящего момента соотношением:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{M_{\text{кр}}}{2W},$$

где W – осевой момент сопротивления сечения вала.

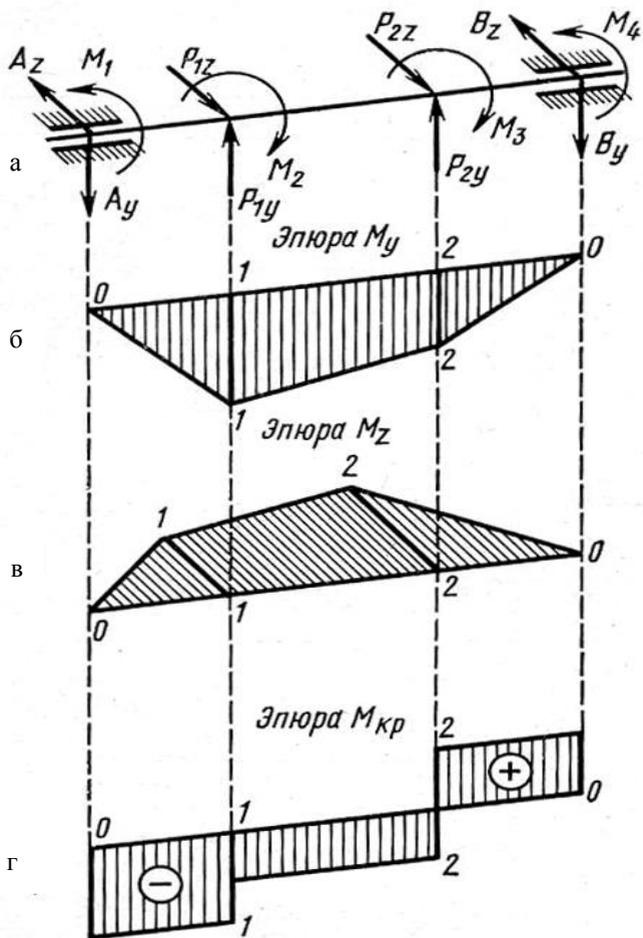


Рисунок 8.1 – Вал круглого поперечного сечения:

а – расчетная схема; б – эюра момента M_y ; в – эюра момента M_z ;
 г – эюра момента $M_{кр}$

Условие прочности согласно третьей теории:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Если учитывать четвертую теорию прочности, то:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Осуществив подстановки, аналогичные предыдущим, получают:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}}{W} \leq [\sigma].$$

Условие прочности можно заменить одной формулой:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W} \leq [\sigma],$$

где $M_{\text{ЭКВ}}$ – эквивалентный (приведенный) момент.

Тогда:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W} \leq [\sigma].$$

Для третьей теории прочности имеем:

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_u^2 + M_{\text{кр}}^2}.$$

Для четвертой теории прочности

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}.$$

При проверочных расчетах, когда диаметр вала известен, коэффициент запаса прочности имеет вид:

$$n = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\text{ЭКВ}}},$$

где σ_y – предел текучести.

По третьей теории прочности значение $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ определяется выражением. Для этого случая:

$$n = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} + \frac{\tau^2}{(0,5\sigma_y)^2}}}.$$

В соответствии с третьей гипотезой $\tau_y = 0,5\sigma_y$, поэтому:

$$n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} + \frac{\tau^2}{\tau_y^2}}}.$$

После преобразования выражение примет вид:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}},$$

где $n_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\sigma}$ – коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям;

$n_{\tau} = \frac{\tau_y}{\tau}$ – коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям.

8.2 Определение перемещений. Расчет на прочность и жесткость

При действии внешних сил, расположенных на одной из главных плоскостей инерции балки, наблюдается искривление ее оси в той же плоскости.

Рассмотрению подлежит простая консоль, нагруженная на свободном конце силой F , линия действия которой совпадает с одной из главных осей поперечного сечения балки.

При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей. Допущения о малости перемещений позволяют считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны продольной оси недеформированного бруса. Эти перемещения принято называть прогибами.

Для произвольного сечения прогиб обозначают y , а наибольший прогиб – *стрелу прогиба* – f . Геометрическое место центров тяжести поперечных сечений деформированного бруса, т. е. ось изогнутого бруса условно называют изогнутой или *упругой линией* – плоская кривая, лежащая в силовой плоскости. Совпадение плоскости деформации с плоскостью действия нагрузки является особенностью прямого изгиба, по этой причине рассматриваемый случай изгиба называют прямым.

При повороте поперечные сечения остаются перпендикулярными изогнутой оси бруса, что следует из справедливости

гипотезы Бернулли. Следовательно, угол (θ) поворота поперечного сечения равен углу, образованному между касательной к упругой линии в точке и осью недеформированного бруса.

Таким образом, ордината упругой линии и угол наклона касательной, проведенной к ней в этой точке, полностью определяют линейное и угловое перемещения соответствующего поперечного сечения балки. Следовательно, нахождение этих перемещений сводится к исследованию формы упругой линии.

При выбранной системе координат уравнение кривой:

$$y = f(Z),$$

согласно которому изогнется ось балки под нагрузкой. Это уравнение изогнутой оси балки.

С другой стороны, тангенс угла, образованного касательной к кривой $y = f(Z)$ с осью Z , равен:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dZ}. \quad (8.1)$$

В пределах упругих деформаций балки эти углы малы – порядка тысячных долей радианы. Для таких углов можно считать, что тангенс угла равен углу, выраженному в радианах. Отсюда следует, что:

$$\theta = \frac{dy}{dZ},$$

т. е. угол поворота сечения равен первой производной по Z от прогиба y в этом сечении.

Таким образом, задача изучения деформации балки сводится к получению уравнения изогнутой оси $y = f(Z)$. Зная его, можно вычислить дифференцированием угол поворота для любого сечения балки:

$$y'' = \frac{M}{EJ}. \quad (8.2)$$

Выражение (8.2) называется *приближенным дифференциальным уравнением упругой линии*. Для балок постоянного сечения его обычно записывают в виде:

$$E \cdot J \cdot y'' = M(Z).$$

Знаки левой и правой частей приведенных выражений совпадают при условии, что ось y направлена вверх, т. е. для линейных перемещений направление y вверх является положительным (рисунок 8.2)

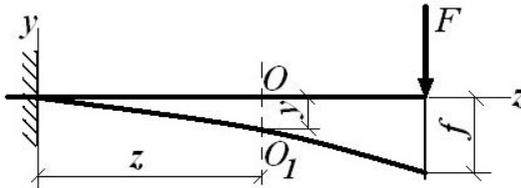


Рисунок 8.2 – К определению положительного направления линейного перемещения

Для того, чтобы получить y как функцию от Z , надо установить зависимость деформации балки от внешних сил, изгибающих ее, от ее размеров и материала.

Необходимо применить зависимость между кривизной оси бруса (кривизной нейтрального слоя) и изгибающим моментом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ};$$

Используя известное выражение кривизны некоторой кривой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

и отбрасывая малые величины второго порядка (y'^2), получают приближенное выражение кривизны изогнутой оси балки:

$$\frac{1}{\rho} \approx y'' = \frac{d^2y}{dZ^2},$$

обеспечивающее определение перемещений с точностью, вполне достаточной для практических расчетов. Подставляя значение кривизны изогнутой оси балки в соотношение, получают:

$$y'' = \frac{M}{EJ}.$$

Выражение называется приближенным дифференциальным уравнением упругой линии. Для балок постоянного сечения его обычно записывают в виде:

$$E \cdot J \cdot y'' = M(Z),$$

где $M(Z) = \psi(Z)$ – алгебраическое выражение закона изменения изгибающего момента по длине балки.

Знаки левой и правой частей выражений совпадают при условии, что ось y направлена вверх, т. е. для линейных перемещений оно принято за положительное.

Для нахождения первой производной (углов поворота поперечных сечений) следует проинтегрировать левую и правую части выражения. В результате получают:

$$E \cdot J \cdot y' = E \cdot J \cdot \theta = \int M dZ + C.$$

интегрируя затем зависимость, получают:

$$E \cdot J \cdot y = \iint (MdZ)dZ + C_Z + D. \quad (8.3)$$

Подставляют в (8.3) уравнение изгибающего момента, выполняют интегрирование и находят постоянные интегрирования С и D. В результате получают возможность найти прогиб любого поперечного сечения балки. Аналогично из уравнения (8.3) можно найти угол поворота произвольного поперечного сечения.

Постоянные интегрирования определяют из так называемых граничных условий, зависящих от способов закрепления (вида и расположения опор) балки.

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид:

$$EJ \frac{d^2 y}{dZ^2} = E \cdot J \cdot y'' = M(Z)$$

или

$$E \cdot J \cdot y'' = -\frac{ql^2}{2} + q \cdot l \cdot Z - \frac{qZ^2}{2}. \quad (8.4)$$

Интегрируя обе части уравнения (8.4), получают

$$EJy' = EJ\theta = -\frac{ql^2Z}{2} + \frac{qlZ^2}{2} - \frac{qZ^3}{6} + C. \quad (8.5)$$

Интегрируя выражение (8.5), находят:

$$EJy = -\frac{ql^2Z^2}{4} + \frac{qlZ^3}{6} - \frac{qZ^4}{24} + CZ + D.$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования С и D учитывают, что левый конец балки жестко закреплен, т. е. его угол поворота и прогиба равны нулю. Первое граничное условие получают в виде:

$$\theta_{Z=0} = Y'_{Z=0} = 0,$$

$Y_{Z=0} = 0$. Подставляя в первое $Y'_{Z=0} = 0$ и $Z = 0$, находят $C = 0$.

Аналогично, принимают $Y_{Z=0} = 0$, находят $D = 0$.

Получают следующие окончательные уравнения углов поворота поперечных сечений и упругой линии:

$$EJy' = -\frac{ql^2Z}{2} + \frac{qlZ^2}{2} - \frac{qZ^3}{6}$$

$$EJy = -\frac{ql^2Z^2}{4} + \frac{qlZ^3}{6} - \frac{qZ^4}{24}.$$

Угол поворота крайнего правого сечения находят, подставив в $Z = l$:

$$EJy'_{Z=l} = EJ\theta_B = -\frac{ql^2}{2} + \frac{ql^3}{2} - \frac{ql^3}{6},$$

или

$$\theta_B = -\frac{ql^3}{6EJ}.$$

Знак минус указывает, что сечение поворачивается по часовой стрелке (функция $y' = f(Z)$ убывает).

Прогиб свободного конца получим, подставив в $Z = l$:

$$EJy_{Z=l} = EJy_B = -\frac{ql^4}{4} + \frac{ql^4}{6} - \frac{ql^4}{24} = -\frac{ql^4}{8},$$

или

$$y_B = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Положительное направление оси Y принято, если она направлена вверх, знак минус указывает, что прогиб y_B направлен вниз.

8.3 Определение напряжений при внецентренном растяжении сжатии, уравнение нейтральной линии

Расчет на жесткость при изгибе предусматривает определение максимальных перемещений, величина которых устанавливается в зависимости от условий работы рассматриваемого элемента.

При изгибе условие жесткости:

$$y_{\max} \leq f_{adm},$$

где f_{adm} – допустимый прогиб сечения балки.

Если кроме перемещений, на работе элемента могут сказаться угловые перемещения сечения, то необходимо проверить, соблюдается ли другое условие жесткости:

$$\theta_{\max} \leq \theta_{adm},$$

где θ_{adm} – допустимый угол поворота сечения балки.

В зависимости от цели и исходных данных задачи существует три вида расчетов на жесткость:

1. **Проверочный расчет.** Цель этого расчета заключается в проверке жесткости рассчитываемого узла, т. е. соблюдения

условий жесткости. В результате расчета могут быть выявлены слабые места конструкции, жесткость которой оказалась недостаточной. В таком случае может быть предложена доработка конструкции или ее отдельного элемента в части их ужесточения.

2. Проектный расчет. Задача проектного расчета заключается в определении рациональной формы и размеров проектируемой конструкции при обязательном соблюдении не только условия прочности, но и жесткости. Если в результате расчета будут найдены два значения искомого размера (один из условия прочности, другой – из условия жесткости), тогда в качестве окончательного следует принять тот, который удовлетворяет обоим условиям, т. е. наибольший.

3. Определение допускаемой нагрузки. Обычно этот вид расчета проводят в том случае, когда решают вопрос о возможности использования действующей конструкции в условиях увеличения рабочих нагрузок. Зная из условия жесткости предельно допустимую нагрузку и сопоставляя ее с новой, можно сделать заключение о пригодности существующей конструкции. Она будет считаться пригодной, если действующая на нее нагрузка не превысит допустимой.

Условие жесткости при изгибе запишем так:

$$|v|_{\max} \leq v_{\text{adm}}, \quad (8.6)$$

где $|v|_{\max}$ – наибольший по абсолютной величине прогиб балки;

v_{adm} – допускаемый прогиб, величина которого зависит от назначения балки и колеблется в пределах $\left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{250}\right)l$, l – длина пролета балки, значение v_{adm} устанавливается нормами на проектирование.

Рассмотрим пример (рисунок 8.3). Используя формулу (8.6), условие жесткости можно представить

$$|v|_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI_x} \leq v_{\text{adm}} \quad (8.7)$$

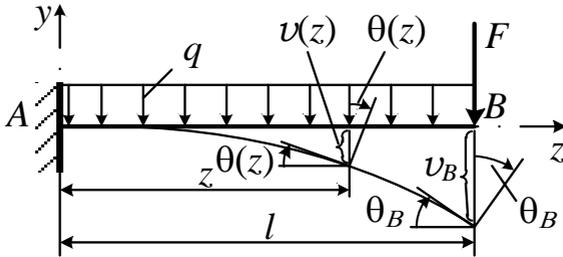


Рисунок 8.3 – Условие жесткости при изгибе консоли

С помощью условия (8.7) можно решать задачи проверочного, конструкционного и эксплуатационного расчетов (рисунок 8.4).

1. **Проверочный расчет.** Дано: $l, q, E, I_x, v_{\text{adm}}$. Определить $|v|_{\max}$ и сравнить с v_{adm} . Задачу решают, используя условие жесткости.

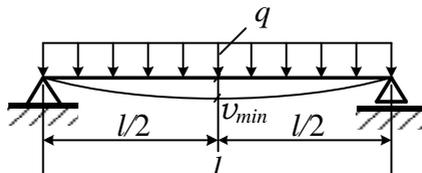


Рисунок 8.4 – Условие жесткости при изгибе балки

2. **Конструкционный расчет.** Дано: l, q, E, v_{adm} и форма поперечного сечения. Определяют I_x и находят размеры сечения.

$$I_x \geq \frac{5ql^4}{384E \cdot v_{\text{adm}}}, \quad (8.8)$$

а затем устанавливают размеры сечения с учетом формулы (8.8) для I_x (для простых сечений; для прокатных профилей, зная I_x , по сортаменту, устанавливают номер профиля и его размеры).

3. **Эксплуатационный расчет.** Дано: l , E , I_x , v_{adm} , вид нагрузки. Определяют нагрузку q .

$$q \leq \frac{384EI_x \cdot v_{\text{adm}}}{5l^4}.$$

Выполняя расчет балок на жесткость, нужно удовлетворить условиям прочности по σ , по τ и по главным напряжениям.

Контрольные вопросы

1. Сущность закона парности касательных напряжений.
2. В чем заключается сущность обобщенного закона Гука?
3. Какая энергия накапливается в теле вследствие упругой деформации и из каких частей она состоит?
4. Какие задачи решают при расчете на прочность?
5. Какие условия прочности используют при плоском напряженном состоянии для пластических и хрупких материалов? Какие виды нагружения называются сложными?
6. Какие внутренние силовые факторы возникают при косом изгибе?
7. Какие внутренние силовые факторы возникают при внецентренном сжатии?
8. Какие внутренние силовые факторы возникают при одновременном действии изгиба и кручения круглого бруса, сдвига и кручения?

9. Какие виды напряжений испытывает сжимаемый стержень при внецентренном приложении сжимаемой или растягиваемой нагрузки?

10. По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при внецентренном растяжении и сжатии? Какой вид имеет эпюра этих напряжений?

11. Получите формулу нормальных напряжений при внецентренном действии продольной силы?

12. Как определяется положение нейтральной оси при внецентренном растяжении и сжатии? Запишите соответствующие формулы.

13. Какова зависимость положения нейтральной линии при внецентренном сжатии от места приложения силы?

14. Проходит ли нейтральная ось при внецентренном растяжении через центр тяжести сечения? Обоснуйте.

15. Чему равно нормальное напряжение в центре тяжести сечения при внецентренном растяжении?

16. Могут ли при внецентренном растяжении возникать сжимающие напряжения в точках поперечного сечения?

17. Как определить положение наиболее напряженной (опасной) точки сечения бруса при внецентренном растяжении (сжатии)?

18. Как составить условие прочности бруса при внецентренном растяжении (сжатии)?

19. В каких точках поперечного сечения внецентренно сжатого (растянутого) стержня могут возникнуть наибольшие растягивающие или сжимающие нормальные напряжения?

20. Докажите свойства нулевой линии и опишите ее по-строение при внецентренном действии продольной силы?

21. Какое положение занимает нулевая линия, когда центр давления лежит на контуре ядра сечения, на контуре сечения?

ГЛАВА 9. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

9.1 Принципиальная схема построения теорий прочности

Напряженное состояние тела. Совокупность нормальных и касательных напряжений (рисунок 9.1), возникающих на бесчисленном множестве площадок, которые можно провести через данную точку, характеризует напряженное состояние в этой точке.

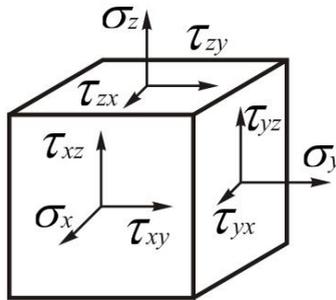


Рисунок 9.1 – Совокупность нормальных и касательных напряжений

В окрестностях этой точки всегда можно выделить элементарный параллелепипед таким образом, чтобы на его гранях не было касательных напряжений, т. е. через точку можно провести три взаимно перпендикулярных площадки, на которых не возникает касательных напряжений. Указанные площадки называют главными, а возникающие на них нормальные напряжения – главными $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рисунок 9.2). Если все три главных напряжения отличны от нуля, напряженное состояние называется объемным или трехосным. Если только два главных напряжения не равны нулю, напряженное состояние считают плоским или двухосным, одно из главных напряжений отлично от нуля, то напряженное состояние линейное или одноосное.

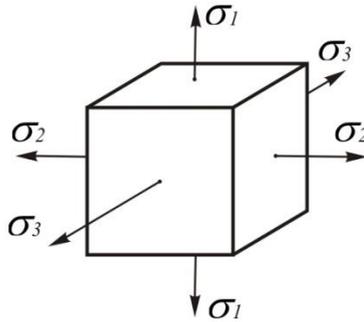


Рисунок 9.2 – К определению главных площадок

Линейное напряженное состояние. Элементы, находящиеся в условиях линейного напряженного состояния, встречаются главным образом в стержнях, испытывающих растяжение (сжатие). При центральном растяжении бруса (рисунок 9.3) под действием силы F по сечению $mm'nn'$ площадью A действует нормальное напряжение $\sigma_1 = N/A$. Здесь $N = F$, A – площадь сечения, перпендикулярного оси стержня.

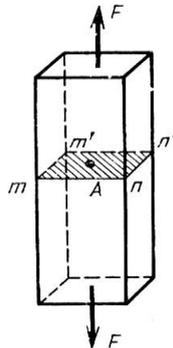


Рисунок 9.3 – К определению центрального растяжения бруса

Определяют напряжения, возникающие в наклонном сечении $m_1 n_1 m'_1 n'_1$ (рисунок 9.4 а), перпендикулярном плоскости чертежа. Положение наклонной площадки определяют по углу, образованному между направлением главного напряжения σ_1 и внешней нормалью n_α к площадке (рисунок 9.4 б). Угол α принимают положительным, если его отсчитывают против часовой стрелки от направления σ_1 . Наклонную площадку обозначают углом, определяющим ее положение.

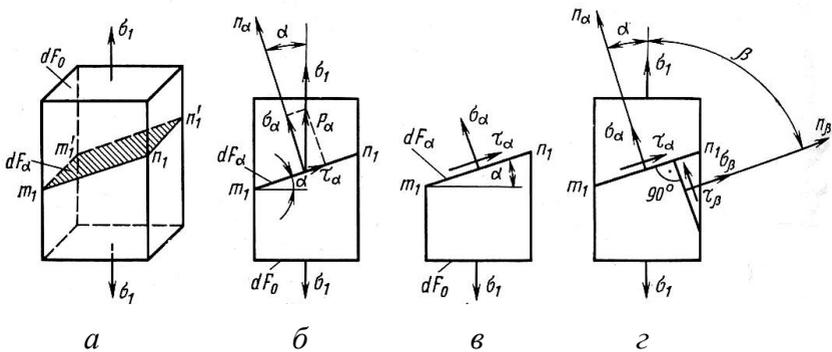


Рисунок 9.4 – Определение напряжений, возникающих в наклонном сечении:

а – перпендикулярном плоскости чертежа; б – к площадке;
 в – по наклонной площадке; г – для определения напряжений на β -площадке

По наклонной площадке, вследствие однородности напряженного состояния для всех ее точек, равномерно распределяются полные напряжения P_α , параллельные σ_1 . Составляющими полного напряжения P_α являются σ_α и τ_α , для определения которых применяют метод сечений (рисунок 9.4 в). По направлению σ_α действует нормальная

сила $dN_\alpha = \sigma_\alpha dA_\alpha$; по направлению τ_α – касательное усилие $dQ_\alpha = \tau dA_\alpha$; по направлению σ_1 – нормальная сила $dN = \sigma_1 dA$. Проектируя указанные силы на направления σ_α и τ_α , соответственно, получают:

$$\sigma_\alpha dA_\alpha - \sigma_1 dA \cos \alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha dA_\alpha - \sigma_1 dA \sin \alpha = 0.$$

Учитывая, что $dA = dA_\alpha \cos \alpha$, из уравнений равновесия:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad (9.1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (9.2)$$

Применяют формулы (9.1) и (9.2) для определения напряжений на β -площадке, перпендикулярной к α – площадке (рисунок 9.4 г).

Нормаль $n\beta$ образует с направлением σ_1 угол, равный:

$$\beta = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

В формулах (9.1) и (9.2) заменяют угол α на β , получают:

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2 \beta = \sigma_1 \cos^2 \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right];$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2 \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha; \quad (9.3)$$

или

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (9.4)$$

Нормальное напряжение считается положительным, если оно направлено внешней нормалью к площадке; касательное напряжение положительное, если для совпадения с его направлением внешнюю нормаль к площадке необходимо повернуть по часовой стрелке.

Свойства линейного напряженного состояния (из зависимостей (9.1) – (9.4)) следующие:

1. Сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, постоянна и равна главному напряжению, т. е. $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1$.

2. На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны, но противоположны по знаку, т. е. $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$. Это свойство является общим для любого напряженного состояния и получило название закона парности касательных напряжений.

3. Величина нормального напряжения в любом наклонном сечении ($\alpha \neq 0^\circ$) меньше σ_1 и достигает максимума только в поперечных сечениях ($\alpha = 0^\circ$). Касательное напряжение имеет наибольшее значение в сечении, составляющем

угол 45° с направлением σ_1 . В этом случае $\tau_{nm} = \frac{\sigma_1}{2}$. Оце-

нивая напряженное состояние стержня при его осевом растяжении или сжатии, можно сделать вывод, что стержень разрушается либо по поперечному сечению в результате действия максимальных нормальных напряжений, либо по наклонной ($\alpha = 45^\circ$) плоскости от действия наибольшего

касательного напряжения.

Плоское напряженное состояние. Элемент, по граням которого действуют растягивающие напряжения σ_1 и σ_2 , показан на рисунке 9.5. Проведем сечение $m_1 - n_1$ (перпендикулярное плоскости чертежа), определяющее положение α – площадки. Напряжения σ_1 и σ_2 вызывают появление на этой площадке напряжений σ_α и τ_α .

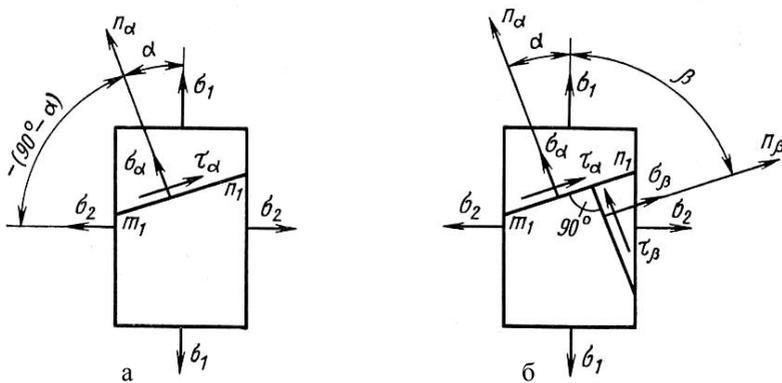


Рисунок 9.5 – Плоское напряженное состояние:

а – первый этап; б – второй этап

Используя принцип независимости действия сил, можно записать:

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha; \quad (9.5)$$

$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha. \quad (9.6)$$

где σ'_α и τ'_α – напряжения, вызванные действием σ_1
 σ''_α и τ''_α – напряжения, вызванные действием σ_2 .

Для определения σ'_α и τ'_α можно воспользоваться формулами (9.1) и (9.2), то есть:

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad \tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

Для того чтобы получить выражение для σ''_α и τ''_α , в формулы (9.1) и (9.2) вместо σ_1 подставляют напряжение σ_2 , а вместо α – со знаком минус угол $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, который образует нормаль $n\alpha$ с направлением σ_2 . Тогда

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \cos^2 \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right] = \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\tau''_\alpha = \frac{\sigma_2}{2} \sin 2 \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right] = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

С учетом полученных зависимостей равенства (9.5) и (9.6) принимают вид:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (9.7)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (9.8)$$

Из выражения (9.8) видно, что максимальные касательные напряжения равны полуразности главных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

и действуют в площадках, наклоненных под углом 45° к главным площадкам. Экстремальными значениями для нормальных напряжений σ_α , согласно зависимости (9.7), будут величины главных напряжений, причем:

$$\sigma_{2\max} = \sigma_1; \quad \sigma_{2\min} = \sigma_2.$$

Используя формулы (9.7) и (9.8), по аналогии определяют напряжения σ_β и τ_β , действующие по β -площадке, перпендикулярной к α -площадке (рисунок 9.5 б):

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \quad (9.9)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (9.10)$$

Формулы (9.7) – (9.10) позволяют определить нормальные и касательные напряжения, действующие по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам при плоском напряженном состоянии.

Из полученных формул (9.9) – (9.10) следует:

а) если сложить правые и левые части выражений (9.7) и (9.9), получают:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const},$$

т. е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам постоянна и равна сумме главных напряжений;

б) сопоставляя формулы (9.8) и (9.10), получают:

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta},$$

т. е. касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку. Это свойство называют законом парности касательных напряжений.

Для определения главных напряжений и главных площадок можно воспользоваться выражениями (9.7) – (9.10), в которых α заменяют на $(-\alpha_0)$. Здесь α_0 – угол, на который надо повернуть нормаль $n\alpha$, чтобы получить направление σ_1 . Опуская промежуточные выкладки, расчетные формулы имеют вид:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2} \quad (9.11)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}}. \quad (9.12)$$

Из выражения (9.12) определяют два значения угла α_0 . Они отличаются друг от друга на 90° : одно значение угла соответствует площадке, по которой действует максимальное главное напряжение, а другое – площадке с минимальным главным напряжением.

Объемное напряженное состояние. Состояния напряжения по наклонным площадкам, не параллельным ни одному из главных напряжений, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \\ \tau_{\alpha} &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_{\alpha}^2}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы, которые образует нормаль к рассматриваемой площадке, соответственно, с направлениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Максимальное касательное напряжение действует по площадке, параллельной главному напряжению σ_2 и составляющей угол 45° с направлениями σ_1 и σ_3 . Величина этого напряжения равна полуразности наибольшего и наименьшего из главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Устанавливают зависимость между относительными деформациями и напряжениями в случае объемного напряженного состояния.

Рассматривают деформации элемента (параллелепипеда) размерами a, b, c (рисунок 9.6 а), по граням которого действуют главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 . В результате деформации длина элемента станет равной $a + \Delta a$; $b + \Delta b$; $c + \Delta c$ (рисунок 9.6 б), а относительное удлинение в главных направлениях будет равно:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}.$$

Применяя принцип суперпозиции, можно записать:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''',$$

где $\varepsilon_1', \varepsilon_1'', \varepsilon_1'''$ – относительные удлинения в направлении σ_1 ,

вызванные действием соответственно только напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 .

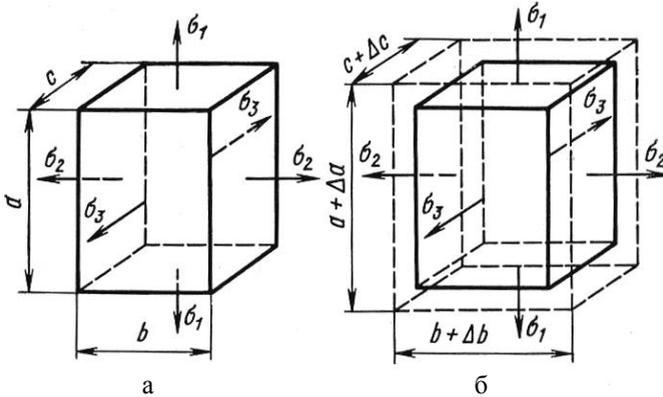


Рисунок 9.6 – Деформации элемента (параллелепипеда):

а – по граням которого действуют главные напряжения;
 б – в результате деформации длина элемента увеличится

В указанном направлении напряжение σ_1 вызывает продольную деформацию, а напряжения σ_2 и σ_3 – поперечную.

На основании формул $\sigma = E\varepsilon$ и $\nu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right|$ находят:

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_1'' = -\nu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\nu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Суммируя относительные удлинения, получают:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Аналогично определяем главные удлинения ε_2 и ε_3 :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \quad (9.13)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Система равенств (9.13) является математическим выражением **обобщенного закона Гука**. Полагая в равенствах (9.13) одно из главных напряжений равным нулю, получают закон Гука для плоского напряженного состояния.

До деформации объем элемента $V_0 = abc$, в деформированном состоянии:

$$V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) =$$

$$= V_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) =$$

$$= V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).$$

Пренебрегая величинами второго и третьего порядков малости, т. е. последними четырьмя членами, получают относительное изменение объема:

$$\varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Выразив главные удлинения через главные напряжения при помощи формул (9.13), получают:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (9.14)$$

Из выражения (9.14) следует, что для изотропных материалов коэффициент Пуассона не может быть более 0,5.

Потенциальная энергия деформации. Вследствие упругой деформации в теле накапливается ее потенциальная энергия. Удельную потенциальную энергию деформации в случае осевого растяжения или сжатия определяют по формуле

$u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$. Для объемного напряженного состояния эта энергия равна:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}.$$

Воспользовавшись обобщенным законом Гука, получают:

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right]. \quad (9.15)$$

9.2 Теория максимальных касательных напряжений и теория удельной потенциальной энергии изменения формы

Общие сведения о расчетах деталей на прочность. Решают две задачи: определение истинного напряженно – деформированного состояния деталей при действии заданных нагрузок и установление величины напряжений и деформаций, являющихся опасными.

Для простых видов деформаций эта задача решается сравнительно просто: по известным формулам определяют максимальные напряжения, которые затем сравнивают с опасными (предельными) напряжениями, устанавливаемыми экспериментально. При этом прочность детали считается обеспеченной, если максимальные напряжения не превышают предельных значений.

Для сложного напряженного состояния подобный метод оценки прочности не пригоден. Опыт показывает, что опасное состояние может наступить при различных предельных зна-

чениях главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 в зависимости от соотношений между ними. В случае сложного напряженного состояния конструкции рассчитывают на прочность на основании теоретических разработок с использованием данных о механических свойствах материалов, получаемых при испытании на растяжение и сжатие.

При оценке прочности при различных видах напряженного состояния используют теории прочности, с помощью которых главные напряжения приводятся к одному напряжению растяжения, эквивалентному напряжению σ_{red} . Существует несколько теорий прочности.

Первая теория прочности – теория максимальных нормальных напряжений. Предполагается, что эквивалентное напряжение равно максимальному нормальному напряжению:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 \leq \sigma_{adm}.$$

Вторая теория прочности – теория максимальных относительных деформаций – определяет эквивалентные напряжения, исходя из равенства максимальных относительных деформаций при сложном и приведенном напряженных состояниях:

$$\varepsilon_{red} = \varepsilon_{max} \leq \varepsilon_{adm}.$$

Условие прочности в напряжениях, полученное с использованием обобщенного закона Гука, имеет следующий вид:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{adm}.$$

Обе теории предложены давно и почти не используются, так как не согласуются с опытными данными, однако позволяют получить удовлетворительный результат для хрупких материалов.

Третья теория прочности – теория наибольших касательных напряжений. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{red} = \tau_{max} \leq \tau_{adm}.$$

Поскольку $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, $\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2}$,

то условие прочности окончательно можно записать так:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm},$$

где σ_{adm} – допускаемое напряжение при простом растяжении.

При плоском напряженном состоянии условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}.$$

Четвертая теория прочности – энергетическая теория формоизменения. Условие прочности имеет вид:

$$u_{\phi} \leq u_{adm},$$

где u_{ϕ} – удельная потенциальная энергия формоизменения.

Выразив u_{ϕ} и u_{adm} через главные напряжения, окончательно получают:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \leq \sigma_{adm}$$

или

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq \sigma_{adm}.$$

Для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}.$$

Для расчетов деталей, изготовленных из хрупких материалов, третья и четвертая теории не пригодны.

Теория прочности Мора – теория предельных напряженных состояний. Условие прочности записывают в следующем виде:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - m\sigma_3 \leq \sigma_{adm},$$

где $m = \sigma_{u,t} / \sigma_{u,c}$ – коэффициент, учитывающий различную способность материала сопротивляться растяжению и сжатию;

$\sigma_{u,t}$ – предельное напряжение при растяжении;

$\sigma_{u,c}$ – предельное напряжение при сжатии.

Для пластических материалов предельные напряжения равны соответствующим пределам текучести, т. е.

$\sigma_u^{t(c)} = \sigma_y^{t(c)}$. Для хрупких материалов предельные напряжения равны пределам прочности $\sigma^{t(c)} = \sigma_u$.

В практических расчетах для пластических материалов используют третью или четвертую теории прочности, для хрупких материалов – теорию прочности Мора.

9.3 Расчет стержней на прочность при сложном напряженном состоянии

Проектирование является процессом создания комплекса технической документации, предназначенной для изготовления изделия, его контроля и эксплуатации.

Различают пять этапов (стадий) проектирования (разра-

ботку конструкторской документации): 1 – техническое задание; 2 – техническое предложение; 3 – эскизный проект; 4 – технический проект; 5 – рабочий проект.

Техническое задание – документ, содержащий наименование, основное назначение, технические требования, показатели качества, экономические показатели и специальные требования заказчика к изделию.

Техническое предложение – совокупность конструкторских документов, обосновывающих техническую и технико-экономическую целесообразность разработки изделий на основе анализа технического задания и различных вариантов возможных решений с учетом достижений науки и техники в стране и за рубежом, патентных материалов. Техническое предложение утверждается заказчиком и генеральным подрядчиком.

Эскизный проект предусматривает разработку принципиальной схемы изделия, т. е. принцип его действия и расположения основных узлов. На этом этапе составляют структурную и кинематическую схему, приводится кинематический и силовой анализ механизма.

Технический проект – совокупность конструкторских документов, содержащих полное представление об устройстве изделия. При выполнении технического проекта окончательно отрабатывают и подготавливают к детализовке общие виды механизмов и узлов с помощью уточненных расчетов корректируют предварительно намеченные размеры, форму и материалы всех деталей, назначают допуски и посадки, намечают защитные и декоративные покрытия, составляют спецификации, технические требования и характеристики общих видов.

Рабочий проект – совокупность документов, содержащих чертежи общих видов, узлов и деталей, оформленных так, чтобы по ним можно было изготавливать изделия и контролировать их производство и эксплуатацию.

Основные критерии работоспособности механических устройств: прочность, жесткость, износостойкость, вибро-

устойчивость, теплостойкость и др. Указанные критерии оценивают в ходе соответствующих расчетов. В практике проектирования применяются проектные и проверочные расчеты.

Под проектным понимают расчет новых деталей, размеры которых еще не известны. Обычно при проектировочных расчетах число неизвестных превышает число уравнений, которыми располагает проектировщик. Численными значениями недостающих неизвестных задаются, используя существующие рекомендации, и определяют приближенное значение искомого параметра по упрощенным расчетным зависимостям.

Проверочные расчеты применяют для вычисления действительных запасов прочности в опасных сечениях или допустимых нагрузок при условии, что форма и размеры деталей известны. Поэтому для проверочных расчетов применяют уточненные расчетные формулы.

В реальном проектировании, как правило, с помощью проектных расчетов предварительно намечают основные размеры, а затем, используя проверочные расчеты, окончательно корректируют намеченные размеры и форму деталей. При проектировании механических узлов материалы, форма и размеры деталей должны быть выбраны с таким расчетом, чтобы исключить возникновение недопустимых деформаций, поломку деталей или разрушение рабочих поверхностей.

Прочность детали обеспечена, когда расчетные нормальные σ или касательные τ напряжения в ее опасных сечениях не превышают допустимых $[\sigma]$ или $[\tau]$. Условия прочности выражаются зависимостью $\sigma \leq [\sigma]$ или $\tau \leq [\tau]$.

При проверочном расчете, когда форма и размеры детали заранее намечены (известны), определяются напряжения в опасных сечениях детали по формулам:

при растяжении, сжатии и смятии
$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma];$$

при срезе $\tau = \frac{F}{A_{\text{ср}}} \leq [\tau];$

при изгибе $\sigma_u = \frac{M_u}{W_u} \leq [\sigma];$

при кручении $\tau = \frac{M_k}{W_k} \leq [\tau].$

В этих формулах:

F – сила, деформирующая деталь;

A – площадь сечения детали;

$A_{\text{ср}}$ – площадь среза детали;

$$W_u = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_k = \frac{\pi d^3}{16}; \quad A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое напряженное состояние в точке и чем оно характеризуется?
2. Виды напряженного состояния и чем они характеризуются.
3. Свойства линейного напряженного состояния.
4. В чем заключается оценка напряженного состояния стержня при его осевом растяжении (сжатии)?
5. Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам?
6. Сущность закона парности касательных напряжений.
7. Обобщенный закон Гука и в чем заключается его сущность.
8. Какая энергия накапливается в теле вследствие упругой деформации и из каких частей она состоит?

9. Сколькими параметрами определяется плоское напряженное состояние точки? Назовите эти параметры?

10. В каких случаях возникают предельные напряженные состояния у пластичных и хрупких материалов?

11. Сформулируйте закон парности касательных напряжений?

12. Дайте определение относительно знаков компонента тензора напряжений.

13. Какие существуют типы напряженного состояния в точке тела, чем они отличаются?

14. Что понимается под линейным напряженным состоянием?

15. Что понимается под плоским напряженным состоянием?

16. Что понимается под объемным напряженным состоянием?

17. Какое напряженное состояние называется пространственным (трехосным), плоским (двухосным) и линейным (одноосным)?

18. Дайте определение главных площадок и главных напряжений. Получите выражения для определения положения главных площадок и величин главных напряжений?

19. Как определить напряжение на наклонной площадке растянутого стержня?

20. Чем характеризуется деформированное состояние в точке?

ГЛАВА 10. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

10.1 Понятие потери устойчивости для идеального стержня. Критическая сила

Искривление длинных стержней, сжимаемых продольными силами, называется *продольным изгибом*, а разрушение продольно сжатых стержней или их чрезмерная деформация – *потерей устойчивости*.

Схема нагружения стержня, длина которого значительно больше его поперечных параметров, силами F_1, F_2, F_3 , показана на рисунке 10.1. За предельную нагрузку принимают F_{cr} (наименьшее значение сжимающей силы, при котором сжатый стержень утрачивает сохранять прямолинейную форму равновесия, называется критической силой).

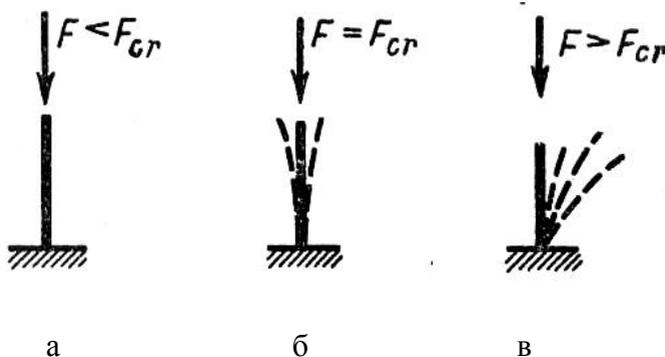


Рисунок 10.1 – Нагружения стержня:

а – стержень сжат, ось прямолинейна; б – стержень не только сжат, но и изогнут; в – разрушение стержня

На рисунке 10.1 а $F_1 < F_{cr}$ – стержень сжат, ось прямолинейна. Если приложить поперечную силу, то стержень от-

клонится от вертикального положения, но после снятия поперечного нагружения его ось снова прямолинейна. Стержень находится в положении устойчивого равновесия.

На рисунке 10.1 б $F_1 = F_{cr}$ – нагрузка равна критической, стержень не только сжат, но и изогнут. Силы упругости уравновешивают внешний изгибающий момент. Это равновесие является неустойчивым, так как даже небольшое увеличение нагрузки приводит к разрушению стержня.

На рисунке 10.1 в $F_1 > F_{cr}$ – внутренние упругие силы не могут уравновесить внешний изгибающий момент и произойдет или разрушение образца (для хрупких материалов), или его верхний конец опустится на опорную поверхность (для пластических материалов).

10.2 Сравнение результатов решения задачи Эйлера с другими решениями. Ценность и недостатки идеальной модели

Предельное значение силы, при котором происходит переход из устойчивой формы равновесия в неустойчивую, называется критической силой. Условие устойчивости стержня прямолинейной формы имеет вид:

$$F_{adm} = F_{cr} / n_s, \quad (10.1)$$

где F_{adm} – допускаемая сила, при которой гарантируется работа конструкции без опасности появления продольного изгиба;

n_s – коэффициент запаса устойчивости.

Для стали нормативный коэффициент запаса устойчивости принимается в пределах от 1,8 до 3; для чугуна – от 5 до 5,5; для дерева – от 2,8 до 3,2.

Формула для определения F_{cr} была выведена Леонардом Эйлером из приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки и имеет вид:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (10.2)$$

где $F_{cr} = F_{adm} n_s$ – критическая сила;

I_{\min} – минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня;

μl – приведенная длина стержня;

l – длина стержня;

μ – коэффициент приведения длины стержня, зависящий от способа закрепления концов стержня.

Концы стержня закрепляются одним из четырех способов (рисунок 10.2)

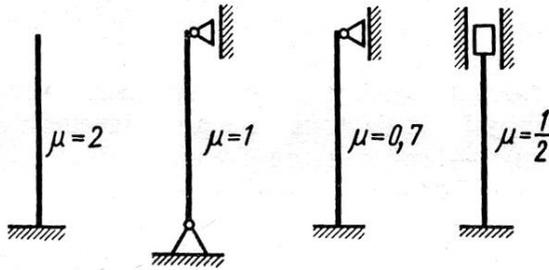


Рисунок 10.1 – К определению способов закрепления концов стержня

Под действием критической нагрузки F_{cr} в поперечных сечениях стержня возникают нормальные критические напряжения. Используя обобщенную теорию Эйлера, получают:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A},$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня равен:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (10.3)$$

Тогда

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{\min})^2}. \quad (10.4)$$

Величина $\mu l / i_{\min}$, характеризующая влияние размеров стержня и способа закрепления концов, называется *гибкостью стержня* и обозначается λ . Это безразмерная величина.

Обозначив $\lambda = \mu l / i_{\min}$, получают:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Для того чтобы воспользоваться формулой Эйлера, необходимо

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr},$$

где σ_{pr} – предел пропорциональности материала стержня.

Условие применимости формулы Эйлера относительно гибкости имеет вид:

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{pr}}.$$

Для стали Ст3 $\sigma_{pr} = 200$ МПа.

$$\lambda \geq \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 / 200} \geq 100.$$

Таким образом, для стержней из малоуглеродистой стали формула Эйлера применима, если их гибкость больше 100. Аналогично получают условие применимости формулы Эйлера для чугуна $\lambda \geq 80$.

Для стержней малой и средней гибкости, для которых $\lambda \geq \lambda_{пред}$, потеря устойчивости наступает в пластической стадии, рассчитывают по эмпирической формуле *Тетмайера – Ясинского*:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda,$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала (приводятся в справочниках).

Для практических расчетов при любой гибкости стержня пользуются формулой:

$$F_{adm} = \varphi \sigma_{adm}^c A,$$

где φ – коэффициент продольного изгиба, величина которого зависит от материала, гибкости стержня, и приводится в справочных таблицах; σ_{adm}^c – основное допускаемое напряжение на сжатие; A – площадь поперечного сечения стержня.

Для подбора сечения формулу приводят к следующему виду:

$$A = F_{adm} / \varphi \sigma_{adm}^c.$$

При этом значении φ приходится задавать, так как гибкость λ неизвестна, как и площадь сечения A , которая зависит от φ . В качестве первого приближения рекомендуется $\varphi_1 = 0,5$. Затем определяют величины $A, I_{\min}, i_{\min}, \lambda$ и находят соответствующее значение φ'_1 . Если получается большая разница между φ'_1 и φ_1 , то расчет следует повторить:

$$\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi'_1) / 2.$$

10.3 Устойчивость сжатых стержней за пределами пропорциональности. Зависимость критических напряжений от гибкости

Рациональные формы сечений сжатых стержней. При заданных нагрузках, длине стержня, допуске напряжении форма и размеры его поперечного сечения характеризуются радиусом инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

Радиус инерции i – величина размерная. Для сравнения различных сечений между собой как более удобной является безразмерная величина ρ_{\min} , которую называют **удельным радиусом инерции**:

$$\rho_{\min} = i_{\min} / A = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

Значения ρ_{\min} для некоторых сечений:

| | |
|---------------------------|------------|
| прямоугольные $h / b = 2$ | 0,204 |
| квадрат | 0,289 |
| круг | 0,36 |
| двутавр | 0,27–0,41 |
| швеллер | 0,38–0,45 |
| уголки равнобокие | 0,4–0,6 |
| кольцо | 0,86–1,53. |

Из приведенных значений сечений следует, что наиболее выгодными из них являются кольцевые, а также коробчатые тонкостенные. Замена сжатых сечений в виде уголков и двутавров трубчатыми стержнями обеспечивает экономию материала до 20–40 %. Расчет повторяют пока разница между последовательными значениями не будет превышать 4–6 %.

При расчете на устойчивость учитывается полная площадь сечения A_{br} . Для стержней, сечения которых имеют значительные отверстия, кроме расчета на устойчивость, производится расчет на прочность по формуле

$$\sigma = F / A_{nt} \leq \sigma_{adm}^c,$$

где A_{nt} – рабочая (нетто) площадь сечения стержня.

10.4 Допускаемая нагрузка на стойку

Если сила, сжимающая стойку, приблизится к критической, то, поскольку коэффициент запаса в расчетах на устойчивость введен не был, стойка может потерять устойчивость. Вводя коэффициент запаса, учтем следующие **факторы**:

1. Нагрузка на стойку может превзойти проектную, т. е. возможны перегрузки.
2. Материал стойки может оказаться неоднородным.
3. Условия работы стойки и ее материала могут оказаться хуже проектных.

Эти же факторы учитывались при выборе коэффициента запаса в расчетах на прочность при центральном сжатии. В расчетах на устойчивость дополнительно нужно учесть, что стойка может иметь начальное искривление оси и сила, сжимающая стойку, может быть приложена с эксцентриситетом. Коэффициент запаса в расчетах на устойчивость обозначим n_s , здесь нижний индекс s от *stability* (англ.) – устойчивость, $n_s \geq 1$.

Тогда допускаемую нагрузку **в расчетах на устойчивость** определим так:

$$F_{\text{adm}}^s = \frac{F_{cr}}{n_s} \quad (10.5)$$

Приводят значения коэффициента n_s для некоторых материалов: для стали $n_s = 1,8-3$; для чугуна $n_s = 5-5,5$; для древесины $n_s = 2,8-3,2$.

Рассмотренная здесь методика определения F_{adm}^s имеет следующие недостатки: во-первых, **формула Эйлера** для определения F_{cr} может оказаться неприменимой, во-вторых, коэффициент запаса n_s может оказаться неизвестным.

Рассмотрим стойку (рисунок 10.2) круглого поперечного сечения с диаметром $d = 1$ см, длиной $l = 50$ см, закрепленная, как показано на рисунке 10.1, изготовленная из стали Ст3. Принять модуль Юнга для материала стойки $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, а коэффициент запаса в расчетах на устойчивость $n_s = 3$. Определить допускаемую нагрузку F_{adm}^s .

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} / \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{4} = \frac{1}{4} \text{ см.}$$

Используя формулу (10.5), вычисляют **максимальную гибкость стойки**

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 50}{1/4} = 140 > 100.$$

Следовательно, применима обобщенная **формула Эйлера** (10.4):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14(1 \cdot 10^{-2})^4}{64}}{(0,7 \cdot 0,5)^2} = 8150 \text{ Н.}$$

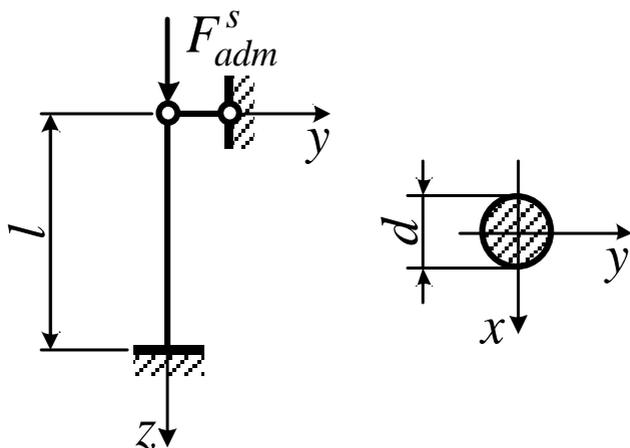


Рисунок 10.2 – Стойка

Определим **допускаемую нагрузку** в расчетах на устойчивость, используя формулу (10.6):

$$F_{adm}^s = \frac{8150}{3} = 2716,7 \text{ Н.}$$

10.5 Общие понятия о динамических нагрузках.

Определение напряжений при равноускоренном движении

Динамическими называют нагрузки, действие которых сопровождается ускорениями. Ускорения возникают либо в рассчитываемых телах, либо в телах, действующих на рассчитываемое.

Ускорение может явиться следствием постепенного, хотя и быстрого изменения скорости, в этом случае ускорение вполне определимо, либо является следствием резкого изменения скорости (как правило, ее падения до нуля) за очень малый промежуток времени, в этом случае ускорение определить невозможно, этот случай назовем ударом.

Рассмотрим подъем шахтной клетки канатом. В случае, когда шахтная клетка неподвижна либо движется с постоянной линейной скоростью v (рисунок 10.3 а), канат нагружен статически.

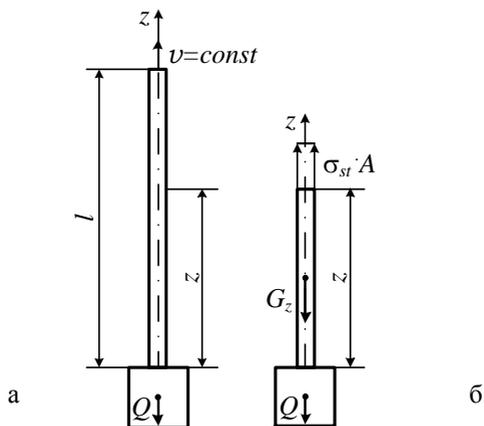


Рисунок 10.3 – К рассмотрению подъема шахтной клетки канатом:

а – шахтная клеть неподвижна либо движется с постоянной линейной скоростью; б – действие отброшенной части каната заменим силой

Определим статическое напряжение в канате σ_{st} (индекс *st* от *static* (англ.) – статический). Используя метод сечений, отсечем нижнюю часть каната длиной z и весом G_z вместе с поднимаемым грузом Q (шахтной клетью).

Действие отброшенной части каната заменим силой $\sigma_{st} \cdot A$, где A – площадь поперечного сечения каната (рисунок 10.3 б).

Условие равновесия

$$\sum \text{пр. } z = \sigma_{st} \cdot A - Q - G_z = 0.$$

Статическое напряжение в канате:

$$\sigma_{st} = \frac{Q + G_z}{A} \quad (10.6)$$

Откуда находим:

$$\sigma_d = \frac{Q + G_z}{A} + \frac{J}{A}.$$

Учитывая, что $J = m \cdot a = \frac{Q + G_z}{g} \cdot a$, и используя формулу (10.5), записываем формулу для σ_d в виде

$$\sigma_d = \sigma_{st} \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (10.7)$$

Вводим обозначения:

$$k_d = 1 + \frac{a}{g}. \quad (10.8)$$

Величину k_d назовем динамическим коэффициентом. Используя формулу (10.8), переписываем выражение (10.7) в виде условия прочности:

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{st} \leq \sigma_{adm}. \quad (10.9)$$

Из формулы (10.9) получаем:

$$\sigma_{st} \leq \frac{\sigma_{adm}}{k_d},$$

расчет на действие динамических нагрузок при равноускоренном движении можно заменить расчетом на статическую нагрузку при пониженном допускаемом напряжении.

10.6 Определение напряжений в тонком равномерно вращающемся кольце

Рассмотрим тонкое кольцо с диаметром D , вращающееся с постоянной угловой скоростью ω (рисунок 10.4 а). Динамические нормальные напряжения считаем равномерно распределенными по толщине кольца. Для их определения используем метод сечений. Рассечем кольцо горизонтальной диаметральной плоскостью на две части. Отбросим нижнюю часть кольца. Действие отброшенной части кольца на оставшуюся заменим силами $\sigma_d \cdot A$, где σ_d – динамические напряжения в кольце, а A – площадь поперечника кольца. При рассмотрении равновесия верхней части кольца используем *принцип Даламбера*, для чего к каждому элементу кольца приложим элементарную центробежную силу инерции dJ (рисунок 10.4 б).

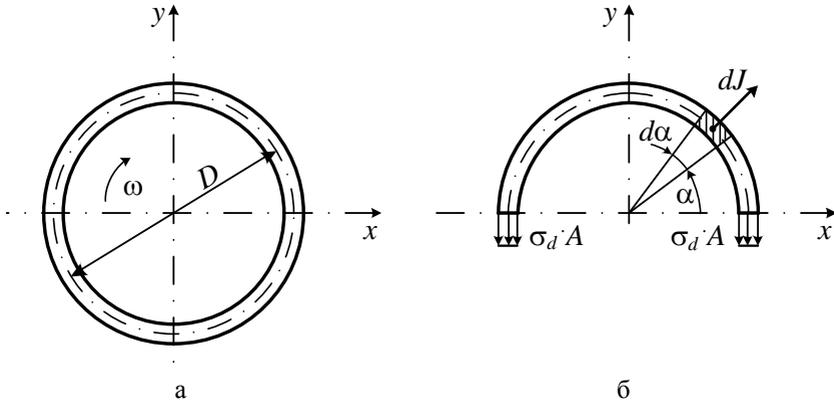


Рисунок 10.4 – Тонкое кольцо с диаметром:

а – вращающееся с постоянной угловой скоростью;
 б – приложим элементарную центробежную силу инерции

Уравнение статики:

$$\sum \text{пр. } y = -2\sigma_d \cdot A + \int_0^{\pi} \sin\alpha \cdot dJ = 0, \quad (10.10)$$

где $dJ = w_n \cdot dm$, здесь w_n – центростремительное ускорение, $w_n = \omega^2 \cdot \frac{D}{2}$; dm – масса элемента кольца, $dm = \frac{\gamma \cdot dV}{g}$, буквой γ обозначен объемный вес материала кольца, а dV – объем элемента, $dV = A \cdot \frac{D}{2} \cdot d\alpha$, g – ускорение свободного падения.

Перепишем уравнение (10.10), подставив найденное dJ :

$$-2\sigma_d \cdot A + \int_0^{\pi} \omega^2 \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot \frac{D}{2} \sin\alpha \cdot d\alpha = 0,$$

$$-2\sigma_d \cdot A + \frac{D^2 \omega^2 \gamma}{4g} \cdot A \cdot \int_0^{\pi} \sin \alpha \cdot d\alpha = 0. \quad (10.11)$$

Вычислив интеграл $\int_0^{\pi} \sin \alpha \cdot d\alpha = -\cos \alpha \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$,

окончательно из (10.11) получим динамическое напряжение в тонком равномерно вращающемся кольце:

$$\sigma_d = \frac{D^2 \omega^2 \gamma}{4g} \quad (10.12)$$

Контрольные вопросы

1. Что называется критической силой?
2. При какой гибкости стержня применима формула Эйлера для определения критической силы?
3. Что называется коэффициентом запаса устойчивости?
4. Дайте определение понятия критическое состояние системы?
5. Опишите явление потери устойчивости.
6. Что происходит со сжатым стержнем при потере устойчивости прямолинейной формы равновесия?
7. Чем опасна потеря устойчивости?
8. Причины потери устойчивости.
9. Что понимается под устойчивым и неустойчивым равновесием?
10. Какая механическая система называется устойчивой и неустойчивой?
11. Приведите примеры устойчивых и неустойчивых объектов.
12. Что означает выражение «сжатый стержень потерял устойчивость»?
13. Какие брусья следует рассчитывать на устойчивость?
14. Какая сила называется критической?

15. Какая геометрическая характеристика определяет величину критической силы, сжимающей упругий стержень?
16. От какой физической константы материала зависит критическое значение сжимающей силы?
17. Почему в реальных конструкциях сжимающие стержни силы должны быть меньше критических?
18. Почему нельзя допускать потерю устойчивости элементов конструкций?
19. Какое ослабление стержня считают местным?
20. Почему местные ослабления не учитывают в расчетах на устойчивость?
21. Как влияют условия закрепления стержня на величину критической силы?
22. Что понимается под запасом устойчивости?
23. Как записывается формула Эйлера?
24. Получите выражение критической силы по Эйлеру для центрально сжатых стержней?
25. Охарактеризуйте влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы?
26. Получите выражение для критических напряжений по Эйлеру?
27. В каких случаях формула Эйлера дает ошибочный результат и почему?
28. Почему существуют ограничения в применении формулы Эйлера? В чем они заключаются?
29. Если сжатый стержень ошибочно рассчитан по формуле Эйлера в области ее неприменимости, опасна ли эта ошибка или она приведет к перерасходу материала на изготовление стержня?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебнике освещены ключевые вопросы расчета прочности, жесткости и устойчивости элементов сооружений, а также основные расчетные характеристики с точки зрения динамики и устойчивости.

Обобщен и систематизирован научно-практический и справочный материал, посвященный методам сечений и геометрическим характеристикам плоских сечений. Выполнен обзор общих законов движения и равновесия материальных тел и возникающих при этом взаимодействий тел.

Теоретическая и практическая подготовка в области прикладной механики направлена на развитие инженерного мышления, приобретение знаний, необходимых для изучения дисциплин, связанных с техникой и технологиями.

Особое внимание в учебнике уделено рассмотрению особенностей выполнения расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, с применением математического аппарата для решения прикладных задач.

Будущим специалистам в области электроэнергетики и электротехники материалы учебника являются базовыми в постепенном овладении методами проектирования и расчета инженерных сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по расчетно-конструкторскому циклу для студентов технических вузов / В. А. Волосухин, П. П. Гайджу-ров, С. И. Евтушенко, В. А. Кузнецов и др. – Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2007. Ч. 1. – 464 с., Ч. 2. – 230 с.

2. Волосухин В. А. Статика и динамика сооружений : учеб. пособие / В. А. Волосухин. – Новочеркасск: Новочерк. инже.-мелиор. ин-т ДГАУ, 2014. – 169 с.

3. Волосухин В. А. Устойчивость и колебание стержневых систем : учеб. пособие / В. А. Волосухин, П. П. Гайджу-ров. – Новочеркасск : ЮРГТУ (НПИ), 2008. – 165 с.

4. Волосухин В. А. Сейсмостойкость строительных объектов и гидротехнических сооружений / В. А. Волосухин, В. П. Дыба, В. Н. Моргунов. – Новочеркасск : ЮРГТУ (НПИ), 2007. – 167 с.

5. Тимошенко, С. П. История науки о сопротивлении материалов, с краткими сведениями об истории теории упругости и теории сооружений / С. П. Тимошенко; под ред. А. Н. Митинского. – М. : Гостехиздат, 1957. – 536 с.

6. Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов. В 2 т. Т. 1. Элементарная теория и задачи. Т. 2. Более сложные вопросы теории и задачи / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965. – 364 с. – 480 с.

7. Беляев Н. М. Сопротивление материалов : учебник / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.

8. Сопротивление материалов : учебник / под ред. Г. С. Писаренко. – Киев : Вища шк 1986. – 776 с.

9. Кремянский Ф. В. Расчет на прочность элементов конструкций при простом и сложном сопротивлении: учеб. пособие / Ф. В. Кремянский, В. А. Дробот – Краснодар: КубГАУ, 2016. – 47 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 3 |
| ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ..... | 4 |
| 1.1 Основные определения | 4 |
| 1.2 Реальный объект и расчетная схема | 5 |
| 1.3 Гипотезы о свойствах материала | 8 |
| 1.4 Внутренние силы. Нормальное и касательное напряжения..... | 10 |
| 1.5 Внутренние силовые факторы в поперечном сечении стержня и соответствующие им виды деформаций..... | 12 |
| ГЛАВА 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ..... | 18 |
| 2.1 Внутренние силовые факторы в стержне при центральном растяжении (сжатии)..... | 18 |
| 2.2 Нормальная сила, дифференциальная ее зависимость от внешней нагрузки, нормальные напряжения в поперечных сечениях..... | 19 |
| 2.3 Закон Гука при одноосном растяжении (сжатии) | 20 |
| 2.4 Потенциальная энергия деформации..... | 23 |
| 2.5 Статически определимые и неопределимые задачи на растяжение (сжатие)..... | 26 |
| 2.6 Экспериментальное определение механических характеристик материалов при центральном растяжении (сжатии)..... | 28 |
| 2.7 Диаграмма условная и истинная. Механические характеристики материала..... | 31 |
| 2.8 Закон разгрузки и повторного нагружения. Влияние температуры на механические характеристики | 34 |

| | | |
|---|---|----|
| 2.9 | Проектировочный расчет, площади поперечного сечения и допускаемой нагрузки | 38 |
| ГЛАВА 3. СДВИГ | | 41 |
| 3.1 | Анализ напряженного состояния при чистом сдвиге | 41 |
| 3.2 | Взаимосвязь модуля упругости первого и второго рода и коэффициента Пуассона | 42 |
| ГЛАВА 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ | | 45 |
| 4.1 | Основные определения. Общие свойства геометрических характеристик | 45 |
| 4.2 | Статические моменты плоской фигуры, центральные оси, центр тяжести | 48 |
| 4.3 | Изменение моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей координат | 50 |
| 4.4 | Вычисление моментов инерции сложных фигур | 54 |
| ГЛАВА 5. ГИБКИЕ НИТИ | | 57 |
| 5.1 | Виды нагрузок. Понятие эксплуатационных режимов | 57 |
| 5.2 | Расчет линий электропередачи на прочность. Понятие критической длины | 60 |
| 5.3 | Зависимость между стрелой провисания, силой натяжения, нагрузкой, длиной и температурой провода | 64 |
| ГЛАВА 6. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ | | 68 |
| 6.1 | Виды изгиба стержня, внутренние силовые факторы и дифференциальные зависимости | 68 |
| 6.2 | Нормальные и касательные напряжения при чистом и прямом поперечном изгибе | 73 |

| | | |
|--|---|-----|
| 6.3 | Расчеты на прочность. Потенциальная энергия деформации балки | 79 |
| ГЛАВА 7. КРУЧЕНИЕ | | 96 |
| 7.1 | Внутренние силовые факторы. Кручения стержня круглого и кольцевого поперечных сечений | 96 |
| 7.2 | Дифференциальные и интегральные зависимости при кручении, техника построения эпюр для стержня | 106 |
| 7.3 | Расчеты на прочность и жесткость при кручении..... | 109 |
| ГЛАВА 8. КОСОЙ ИЗГИБ И ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ | | 124 |
| 8.1 | Косой изгиб, напряжение в поперечном сечении, нейтральная линия | 124 |
| 8.2 | Определение перемещений. Расчет на прочность и жесткость..... | 129 |
| 8.3 | Определение напряжений при внецентренном растяжении сжатии, уравнение нейтральной линии | 135 |
| ГЛАВА 9. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ | | 140 |
| 9.1 | Принципиальная схема построения теорий прочности | 140 |
| 9.2 | Теория максимальных касательных напряжений и теория удельной потенциальной энергии изменения формы..... | 152 |
| 9.3 | Расчет стержней на прочность при сложном напряженном состоянии | 155 |

| | |
|--|-----|
| ГЛАВА 10. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ. | 160 |
| 10.1 Понятие потери устойчивости для идеального стержня. Критическая сила..... | 160 |
| 10.2 Сравнение результатов решения задачи Эйлера с другими решениями. Ценность и недостатки идеальной модели | 161 |
| 10.3 Устойчивость сжатых стержней за пределами пропорциональности. Зависимость критических напряжений от гибкости..... | 165 |
| 10.4 Допускаемая нагрузка на стойку..... | 166 |
| 10.5 Общие понятия о динамических нагрузках. Определение напряжений при равноускоренном движении | 169 |
| 10.6 Определение напряжений в тонком равномерно вращающемся кольце..... | 171 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 175 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 176 |

У ч е б н о е и з д а н и е

Бандурин Михаил Александрович
Пасниченко Павел Григорьевич

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебник

В авторской редакции

Макет обложки – Н. П. Лиханская

Подписано в печать 14.03.2022. Формат 60 × 84 ¹/₁₆.

Усл. печ. л. – 10,5. Уч.-изд. л. – 8,2.

Тираж 500 экз. Заказ № – 100 экз.

Типография Кубанского государственного
аграрного университета.

350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13.