

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

Архитектурно-строительный факультет

Кафедра сопротивления материалов

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ЧАСТЬ 1

по дисциплине

и для самостоятельной работы студентов специальности
08.05.01 Строительство уникальных
зданий и сооружений

Краснодар
КубГАУ
2019

Составители: Е. Н. Селезнева, В. А. Переяслова.

Строительная механика. Часть 1 : метод. указания по дисциплине и для самостоятельной работы / сост. Е. Н. Селезнева, В. А. Переяслова. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – 75 с.

Данные методические указания содержат задания для самостоятельного выполнения контрольных работ, указания по выполнению расчетов и требования к оформлению графической части работы. По каждой теме рассмотрены общие теоретические основы расчета статически определимых балок, ферм и арок, а также расчета статически неопределимых рам методом сил. Приведены примеры решения задач.

Предназначено для студентов специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией архитектурно-строительного факультета Кубанского государственного аграрного университета, протокол № 2 от 22.10.2019.

Председатель
методической комиссии



А. М. Блягоз

- © Селезнева Е. Н.,
В. А. Переяслова.,
составление, 2019
- © ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный аграрный
университет имени
И. Т. Трубиллина», 2019

Общие рекомендации по изучению курса строительной механики и указания по порядку выполнения контрольной работы.

Строительная механика является одной из базовых дисциплин при подготовке студентов, обучающихся по направлению «Строительство». При изучении строительной механики у студентов формируется запас знаний, необходимый при изучении курса строительных конструкций.

В результате выполнения контрольных работ студент приобретает навыки выбора рациональной расчетной схемы сооружения, а также осваивает методики расчетов различных типов расчетных схем.

Строительная механика - одна из сложных инженерных дисциплин, поэтому самостоятельная работа над изучаемым материалом требует системного подхода и включает работу над материалом учебника, конспектами лекционного курса, решение задач контрольной работы.

При самостоятельном изучении теоретических основ курса строительной механики по учебнику целесообразно вести краткий конспект, в который следует заносить встречающиеся новые понятия и определения, выводы формул, чертежи к ним.

После каждой темы приводятся контрольные вопросы, отвечая на которые студент может систематизировать свои знания по соответствующей теме, отследить слабо проработанные разделы темы, что в конечном итоге сделает процесс подготовки результативнее.

После изучения теоретических основ соответствующей темы можно перейти к решению задачи контрольной работы.

Каждый студент выполняет две контрольные работы, первая состоит из четырех задач (см. часть 1), вторая – из трех задач (см. часть 2)

Решение задач должно выполняться самостоятельно, исходные данные приводятся в таблицах и выбираются студентом в соответствии с индивидуальным шифром, указанным преподавателем.

Оформление контрольной работы производится в произвольной форме вручную, в тетради или на отдельных листах формата А-4. Чертежи к решению должны быть выполнены вручную с применением чертежных инструментов.

Задача №1

Расчёт статически определимой многопролётной шарнирной балки.

Для балки, выбранной согласно варианту, требуется:

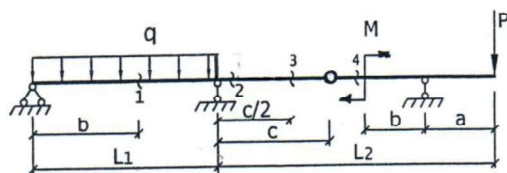
- а) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил;
- б) построить линии влияния M и Q для заданного сечения, а также линию влияния одной опорной реакции (по выбору студента);
- в) определить по линиям влияния M, Q и R от заданной нагрузки.

Таблица 1

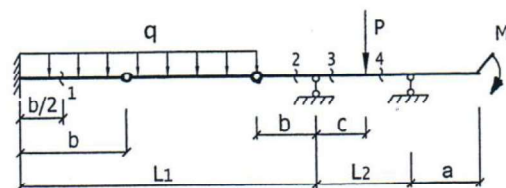
Исходные данные

Первая цифра шифра	l_1 , м	q , кН/м	b , м	Вторая цифра шифра	l_2 , м	P , кН	№ сечения	Последняя цифра шифра (№ схемы)	a , м	C , м	M , кН•м
1	10	1,2	1,0	1	8	3	1	1	1	1	2,0
2	14	2,0	0,8	2	7	2,5	2	2	1,2	2,2	2,2
3	8	1,8	1,9	3	9	6	3	3	2,0	1,4	2,7
4	12	3,0	1,4	4	6	2,8	4	4	2,2	1,6	2,4
5	9	1,5	1,6	5	11	7	1	5	1,3	1,8	2,5
6	11	2,5	2,1	6	10	3,3	2	6	2,1	2,0	1,1
7	7	1,4	1,2	7	12	5	3	7	1,4	1,1	2,6
8	6	0,8	1,8	8	15	8	4	8	1,9	1,3	3
9	5	1,0	1,5	9	14	4	1	9	1,5	1,5	2,8
0	13	2,2	2,0	0	14	3,2	3	0	0,8	1,7	1,5

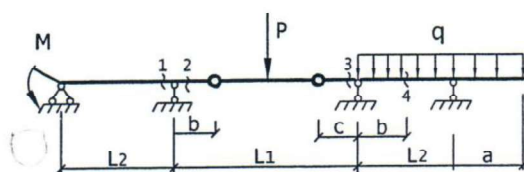
1)



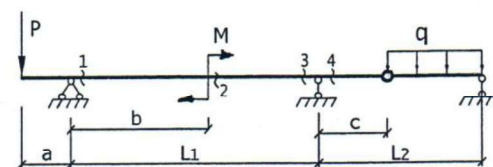
6)



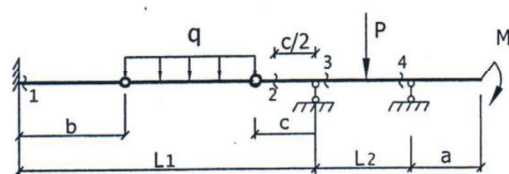
2)



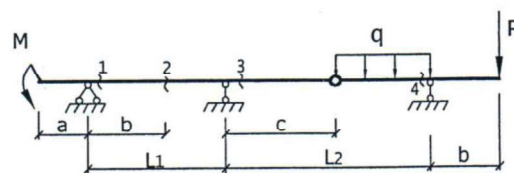
7)



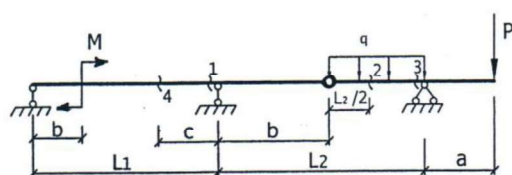
3)



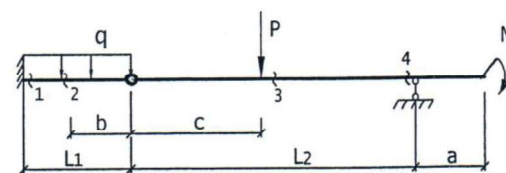
8)



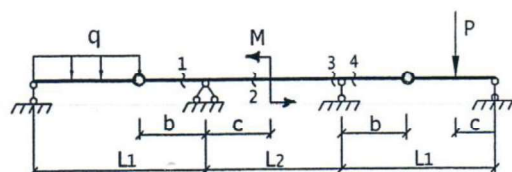
4)



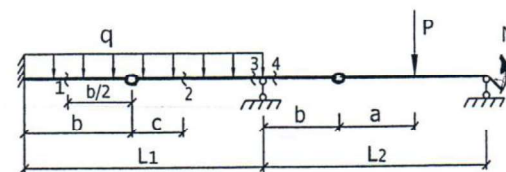
9)



5)



10)



Схемы к задаче №1

Расчет статически определимых многопролетных балок.

Многопролетной шарнирной балкой (МШБ) называется балка, состоящая из двух или более простых балок с консолями или без консолей, соединенных между собой шарнирами

МШБ обладают рядом достоинств:

1. Позволяют перекрыть большие пролеты цепью статически определимых балок, что удобно:

- при расчете

- при строительстве – МШБ состоит из небольших элементов, что позволяет использовать конструкции заводского изготовления;

2. МШБ экономичны – так как за счет перераспределения усилий происходит уменьшение изгибающих моментов по сравнению с однопролетными вариантами.

3. В МШБ не возникает усилий от осадки опор и температурного воздействия.

Недостатки, присущие МШБ:

1. Введение шарниров уменьшает жесткость МШБ по сравнению с неразрезными балками

2. Возникают конструктивные трудности при устройстве шарниров.

Образование МШБ:

МШБ можно получить из неразрезной статически неопределимой балки путем введения промежуточных шарниров. Количество вводимых промежуточных шарниров равно степени статической неопределимости неразрезной статически неопределимой балки или может быть определено из условия статической определимости системы:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 0$$

Нетрудно убедиться в том, что число дисков D на 1 больше числа шарниров, т.е. $D = Ш + 1$, подставив последнее выражение в условие определимости, получим:

$$3(Ш + 1) - 2Ш - C_0 = 0,$$

откуда выразим:

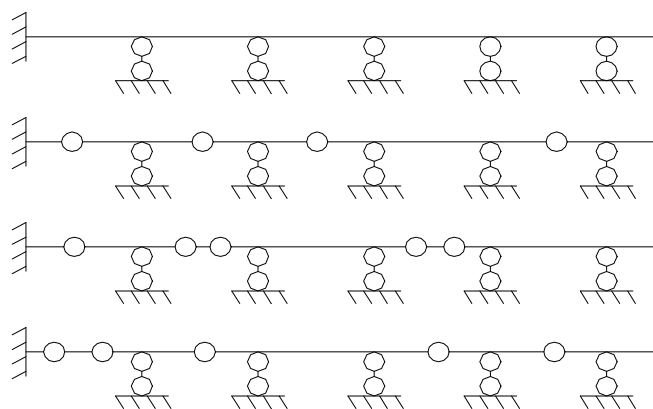
$$Ш = C_0 - 3,$$

Таким образом, количество промежуточных шарниров всегда меньше количества имеющихся в системе опорных связей на 3.

Из условия геометрической неизменяемости МШБ можно сформулировать *правила расстановки шарниров*:

- В пролете может быть установлен один или два шарнира (парные шарниры);
 - Пролеты с парными шарнирами должны чередоваться через свободный пролет;
 - Парные шарниры нельзя ставить в крайнем шарнирно опертом пролете
- Слева и справа от пролета с парными шарнирами должен находиться свободный пролет или жесткая заделка

$$III = C_0 - 3 = 8 - 3 = 5$$



В составе МШБ различают 3 категории однопролетных балок:

Главная балка — простая однопролетная балка, которая имеет две (непересекающиеся в одной точке!) или три связи с землей и воспринимает нагрузку, действующую на нее или передаваемую на нее с вышележащих, второстепенных или подвесных балок.

Второстепенная балка — простая однопролетная балка, которая имеет одну связь с землей или две (пересекающиеся в одной точке!), воспринимает нагрузку, действующую на нее или передаваемую на нее с вышележащих, второстепенных или подвесных балок.

Подвесная балка — простая однопролетная балка, которая не имеет связей с землей и всю свою нагрузку передает на нижележащие балки.

Для выяснения особенностей перераспределения внутренних усилий в МШБ строят поэтажную схему взаимодействия элементов — «этажную схему».

Порядок построения этажной схемы:

- мысленно удаляют все промежуточные шарниры, при этом балка распадается на несколько простых балок с консолями и без консолей, с опорами и без опор.

- определяют тип каждой из балок,

- построение этажной схемы начинают с самого нижнего «этажа», в котором устанавливают главные балки, а затем в порядке «монтажа» – второстепенные, в последнюю очередь в самом верхнем «этаже» – подвесные.

Например:



Расчет многопролетной шарнирной балки или безраспорной рамы

Цель расчета – построение эпюр поперечных сил Q , изгибающих моментов M , продольных сил N .

Так как расчет МШБ сводится к расчету отдельных простых балок, вспомним некоторые положения теории плоского изгиба.

1. Расчет статически определимой балки начинаем с определения опорных реакций, для этого составляем уравнения статического равновесия:

а) для определения опорных реакций составляются уравнения суммы моментов всех сил, приложенных к балке, относительно каждой из опорных точек и уравнение суммы проекций всех сил на горизонтальную ось.

$$\sum M_a = 0$$

$$\sum M_b = 0$$

$$\sum X = 0$$

б) для проверки найденных опорных реакций составляется уравнение статического равновесия – сумма проекций всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу, на вертикальную ось должна равняться нулю:

$$\sum y = 0$$

2. Определение внутренних силовых факторов производится по расчетным участкам.

Границами расчетных участков являются точки, в которых:

- а) происходит изменение внешней нагрузки (в т.ч. и опорные точки);
- б) происходит изменение направления оси стержня или примыкание других стержней;
- в) происходит изменение размеров поперечного сечения стержня.

3. Поперечная сила Q в сечении определяется как алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных по одну сторону от сечения на ось, перпендикулярную оси стержня (на плоскость сечения). Поперечная сила считается положительной, если стремится повернуть отсеченный элемент по ходу часовой стрелки

$$\frac{\uparrow Q}{+\downarrow},$$

4. Изгибающий момент в сечении M - определяется как алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных по одну сторону от сечения, относительно центра сечения.

Изгибающий момент в сечении M считается положительным, если создающая его сила стремится повернуть отсеченный элемент таким образом, что растянутыми оказываются нижние волокна элемента в балке, или внутренние волокна в раме.

5. Для проверки правильности построения эпюр Q и M используют дифференциальные зависимости Журавского: первая производная от поперечной силы по длине элемента представляет собой интенсивность распределенной на этом элементе нагрузки:

$$\frac{dQ}{dx} = q,$$

первая производная от изгибающего момента M представляет собой поперечную силу:

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

Некоторые свойства эпюр Q и M в зависимости от вида приложенной нагрузки:

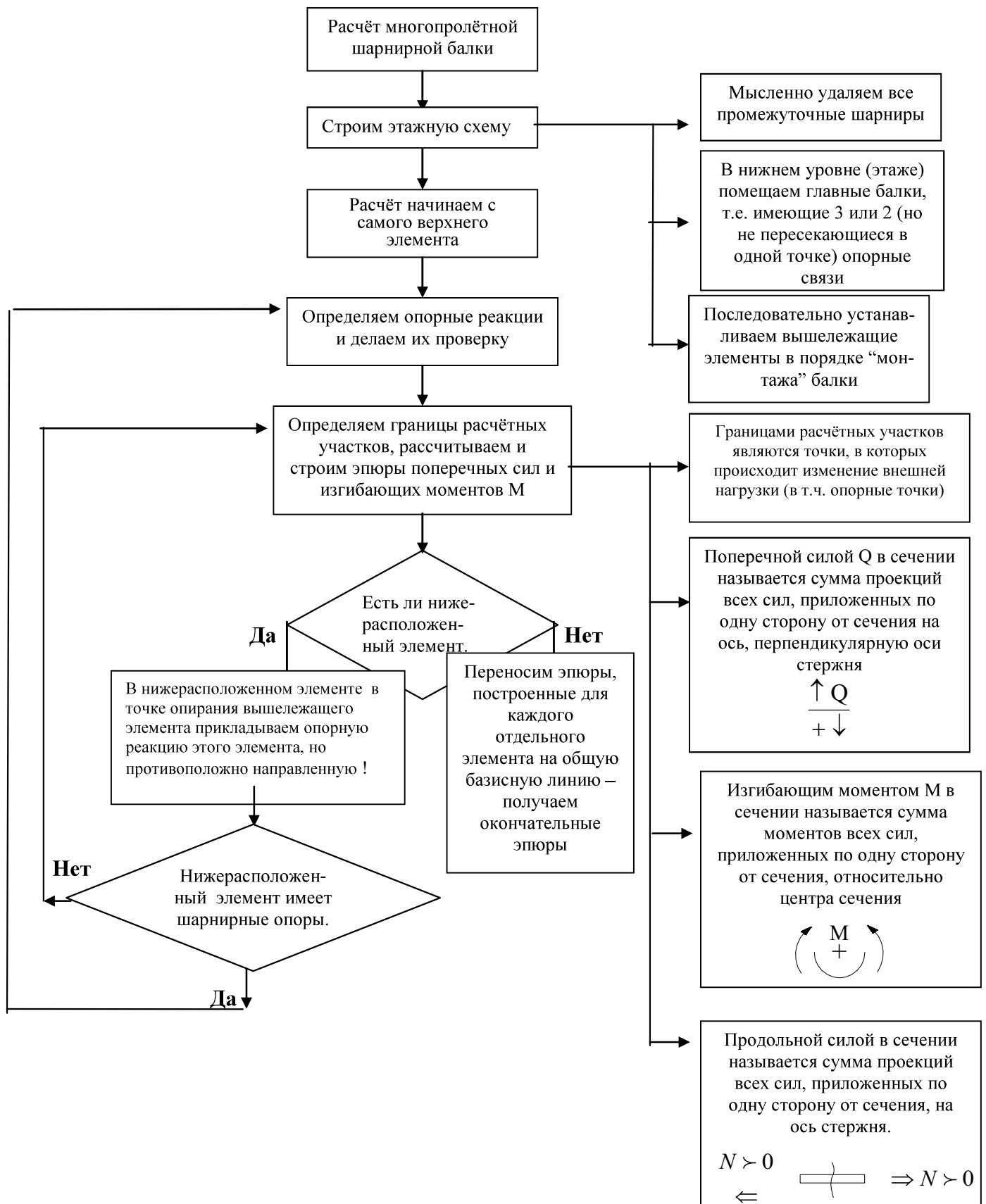
Внешняя нагрузка на участке	Особенности эпюры Q	Особенности эпюры M
В точке приложена сосредоточенная сила P	В точке - скачок на величину приложенной силы	В точке - перелом прямой линии, очерчивающей эпюру
На участке приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q	Эпюра Q очерчена прямой наклонной линией.	Эпюра M очерчена по закону параболы
	Если линия, очерчивающая эпюру Q , проходит через ноль	На эпюре M имеет место экстремальное ($\min$ или $\max$) значение момента
На участке отсутствует равномерно распределенная нагрузка, т.е. $q=0$	Эпюра очерчена прямой линией, параллельной оси стержня.	Эпюра очерчена прямой наклонной линией.

Продольная (нормальная) сила N в сечении определяется как алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных по одну сторону от сечения на продольную ось стержня (на нормаль к плоскости сечения). Продольная сила считается положительной, если стремится растянуть отсеченный элемент.

Общий порядок расчета МШБ статически определимой балки:

1. Строим этажную схему взаимодействия элементов.
2. Расчет начинается с самого верхнего элемента:
 - 2.1. определяются опорные реакции из условий статического равновесия
 - 2.2. выполняется расчет и построение эпюр внутренних силовых факторов
 - 2.3. для проверки правильности расчета используются уравнения статического равновесия и дифференциальные зависимости Журавского.
3. Далее производится последовательно расчет каждого нижележащего на этажной схеме элемента. При этом учитывается не только приложенная к нему нагрузка, но и силы давления, передаваемые вышележащими элементами. Сила давления вышележащего элемента прикладывается на консоли нижележащего элемента. Сила давления равна по величине опорной реакции вышележащего элемента, но имеет обратное направление.
 - 3.1. определяются опорные реакции из условий статического равновесия
 - 3.2. выполняется расчет и построение эпюр внутренних силовых факторов
 - 3.3. для проверки правильности расчета используются уравнения статического равновесия и дифференциальные зависимости Журавского.
4. Для построения окончательных эпюр переносят построенные на каждом элементе эпюры на общую базисную линию.

Блок-схема расчета многопролетной шарнирной балки на действие неподвижной нагрузки.



Линии влияния в многопролётных балках

Линия влияния – это графическое изображение закона изменения заданного усилия в заданном сечении (или опорной реакции) при движении по сооружению силы $P=1$, другими словами – это график, который показывает, как влияет на величину усилия в заданном сечении (или опорной реакции) перемещение единичной силы $P=1$ по сооружению.

Нам кажется целесообразным для простоты дальнейших построений представить построение линий влияния в простых балках в табличной форме:

Таблица 1: Линии влияния в простой балке

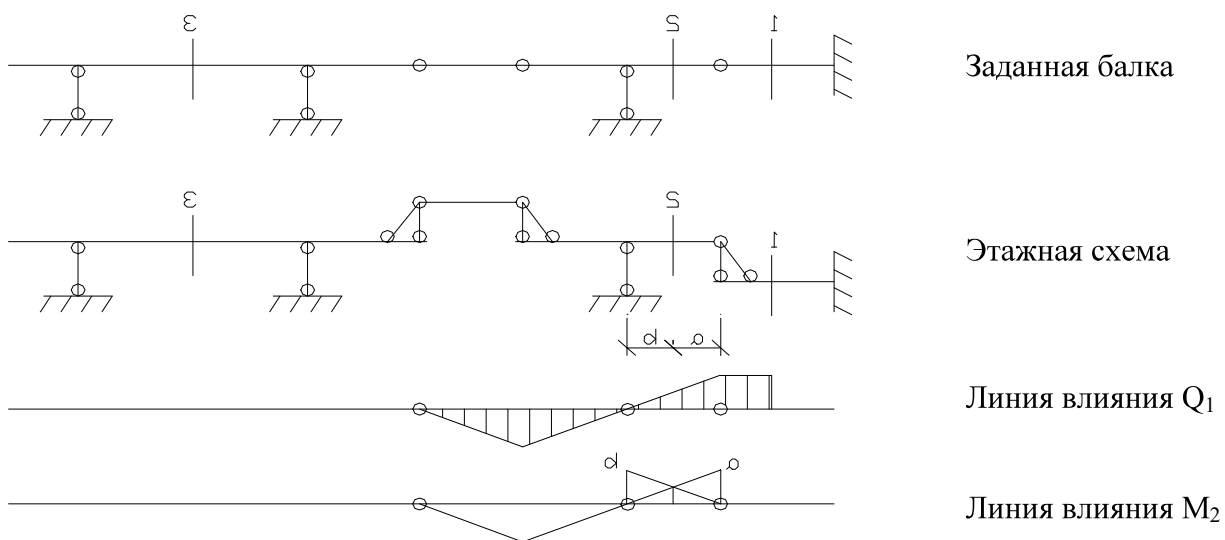
Простая Балка Л.В. усилия				
Л.В. R_a				
Л.В. R_b (M_r)				
Л.В. Q_n				
Л.В. M_n				
Л.В. Q_k				
Л.В. M_k				
Л.В. Q_m				
Л.В. M_m				

Построение линий влияния опорных реакций и усилий в заданном сечении многопролетной шарнирной балки.

Порядок построения линии влияния в многопролетных шарнирных балках

1. Построить этажную схему
2. Перенести на этажную схему сечение, для усилия в котором (или опору, для опорной реакции в которой) требуется построить линию влияния.
3. Рассмотреть элемент, на который попало сечение (или которому принадлежит опора) как простую балку. Построить линию влияния для того элемента этажной схемы, которому принадлежит сечение (или опора), как для простой балки (для построения линии влияния в простой балке рекомендуется воспользоваться таблицей линий влияния в простой балке).
4. Учесть взаимодействие элементов балки. Продолжить построение линии влияния в пределах вышележащего на этажной схеме элемента. Для этого крайнюю ординату построенной линии влияния соединить прямой линией с нулевой точкой, расположенной на опорной вертикали вышележащего элемента, и, если вышележащий элемент имеет консоль, продолжить эту линию до конца консоли вышележащего элемента.
5. Построение (по пункту 4) повторить для всех вышележащих элементов этажной схемы

Пример построения линий влияния в многопролетной шарнирной балке:



Определение усилий по линиям влияния

С помощью линий влияния можно определять усилия в заданном сечении при любом приложении нагрузки. Определение усилий в многопролетных шарнирных балках от действия приложенной нагрузки по линии влияния производится по формуле:

$$S_i = \pm \sum P_i y_i \pm \sum q_i \varpi_i \pm \sum M_i tg \alpha_i$$

где:

S_i – усилие в заданном сечении

$\sum P_i y_i$ - сумма произведений величины приложенной сосредоточенной силы P_i на величину ординаты линии влияния под этой силой - y_i . Ординаты линий влияния и площади соответствующих участков определяем из подобия треугольников,

$\sum q_i \varpi_i$ - сумма произведений интенсивности приложенной нагрузки q_i

на ϖ_i - площадь участка линии влияния, расположенного под этой нагрузкой -

$\sum M_i tg \alpha_i$ - сумма произведений величины приложенного момента M_i на величину тангенса угла наклона участка линии влияния, расположенного под точкой приложения момента - $tg \alpha_i$

Правила знаков, принятые при определении усилий по линиям влияния:

- а) Если P_i или q_i направлены вниз, то их принято считать положительными
- б) Ординаты y_i определяются по линиям влияния из подобия треугольников и снимаются с линии влияния с соответствующими знаками, площади участков линии влияния ϖ_i так же принимаются с соответствующими им на линии влияния знаками.
- в) Если момент M_i , приложенный к балке имеет направление «по ходу часовой стрелки», его принято считать положительным.
- г) Тангенс угла наклона участка линии влияния, расположенного под точкой приложения момента принято считать положительным, если угол α_i отсчитывается от горизонтали против хода часовой стрелки

Пример расчёта статически определимой многопролётной балки.

Для балки, выбранной согласно варианту, требуется:

- построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил
- построить линии влияния M и Q для заданного сечения, а также линию влияния одной опорной реакции (по выбору студента)
- определить по линиям влияния M, Q и R от заданной нагрузки.

Исходные данные:

$$\ell_1, \text{м} = 8$$

$$\ell_2, \text{м} = 10$$

схема № 8

$$q, \text{кН/м} = 1,8$$

$$P, \text{кН} = 3,3$$

$$a, \text{м} = 1,9$$

$$b, \text{м} = 1,9$$

Сечение № 2

$$C, \text{м} = 1,3$$

$$M, \text{кН/м} = 3$$

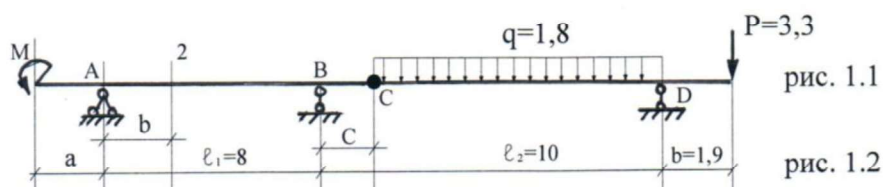


рис. 1.1

рис. 1.2

Решение.

- Построим этажную схему взаимодействия элементов (рис 1.2).

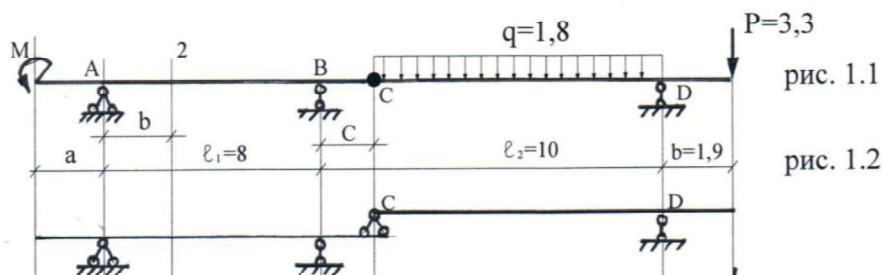


рис. 1.1

рис. 1.2

- Аналитический расчет начинаем с самого верхнего элемента на этажной схеме:

- определяем опорные реакции, для этого составляем уравнения статического равновесия, рассматриваем сумму моментов всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу, относительно опорных точек:

$$\sum M_C = 0$$

$$R_D \cdot 8,7 - q \cdot 8,7 \cdot 4,35 - 3,3 \cdot (8,7 + 1,9) = 0$$

$$R_D = 11,85 (\text{кН})$$

$$\sum M_D = 0$$

$$R_C \cdot 8,7 - q \cdot 8,7 \cdot 4,35 + 3,3 \cdot 1,9 = 0$$

$$R_C = 7,11(\text{кН})$$

б) для проверки найденных опорных реакций составим уравнение статического равновесия, а именно – сумма проекций всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу, на вертикальную ось должна равняться нулю:

$$\sum Y = 0$$

$$R_C + R_D - q \cdot 8,7 - P = 0$$

$$7,11 + 11,85 - 1,8 \cdot 8,7 - 3,3 = 0$$

в) записываем выражения для определения поперечной силы и изгибающего момента на каждом из расчетных участков рассматриваемого элемента:

$$0 \leq x_1 \leq 8,7$$

$$Q = R_C - q \cdot x$$

$$M = R_C \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$0 \leq x_1 \leq 1,9$$

$$Q = +P = 3,3$$

$$M = -P \cdot x$$

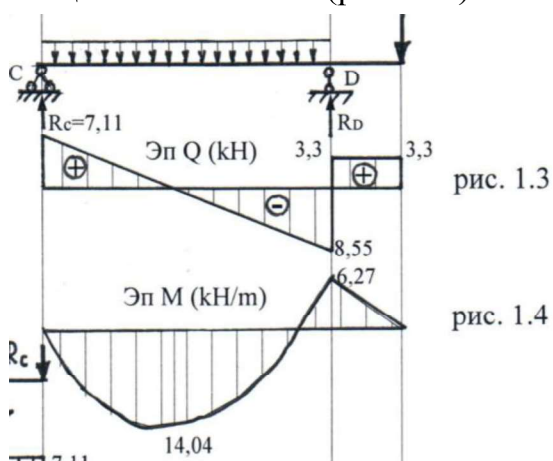
$$x = 0; \quad Q = 7,11; (\text{кН}) \quad M = 0;$$

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2,7; \quad Q = -8,55; (\text{кН}) \quad M = -6,27 (\text{кНм})$$

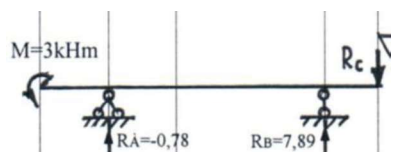
$$x = 1,9; \quad M = -6,27 (\text{кНм})$$

На основании выполненных расчетов строим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M (рис. 1.3)



Приступаем к расчету следующего (ниже лежащего на этажной схеме) элемента ABC, при этом учитываем давление, передаваемое на него выше лежащими элементами: в точке опирания вышележащего элемента

прикладываем силу, равную по величине опорной реакции этого элемента, но изменяем ее направление на противоположное.



Далее повторяем расчет следующего элемента в той же последовательности:

а) определяем опорные реакции, для этого составляем уравнения статического равновесия, рассматриваем сумму моментов всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу, относительно опорных точек:

$$\sum M_A = 0 \quad R_B \cdot 8 - V_C \cdot 9,3 + M = 0 \quad R_B = \frac{7,11 \cdot 9,3 - 3}{8} = 7,89 \text{ (кН)}$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_A \cdot 8 + V_C \cdot 1,3 - M = 0 \quad R_A = \frac{3 - 7,11 \cdot 1,3}{8} = -0,78 \text{ (кН)}$$

б) для проверки найденных опорных реакций составим уравнение статического равновесия, а именно – сумма проекций всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу, на вертикальную ось должна равняться нулю:

$$\sum Y = 0 \quad R_A + R_B - V_C$$

в) записываем выражения для определения поперечной силы и изгибающего момента на каждом из расчетных участков рассматриваемого элемента:

$$0 \leq x \leq 1,9$$

$$Q = 0$$

$$M = -3$$

$$0 \leq x \leq 1,3$$

$$Q = R_A = -0,78 \text{ (кН)}$$

$$M = -M + R_A \cdot x$$

$$x = 0; M = -3;$$

$$x = 1,9; M = -4,484 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

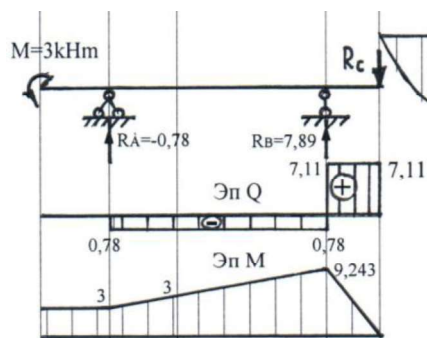
$$0 \leq x \leq 1,3$$

$$Q = V = 7,11 \text{ (кН)}$$

$$M = -V \cdot x$$

$$x = 0; M = 0;$$

$$x = 1,3; M = -9,243 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$



Для построения окончательных эпюр перенесем на общую базисную линию эпюры, построенные для каждого отдельного элемента балки (рис. 1.5)

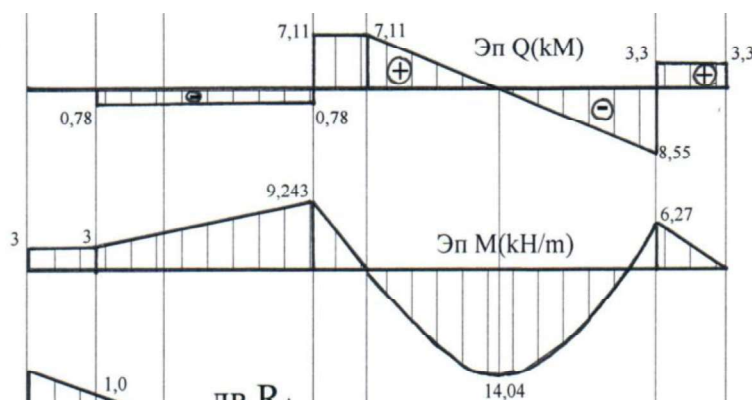


рис. 1.5

3. Построение линии влияния:

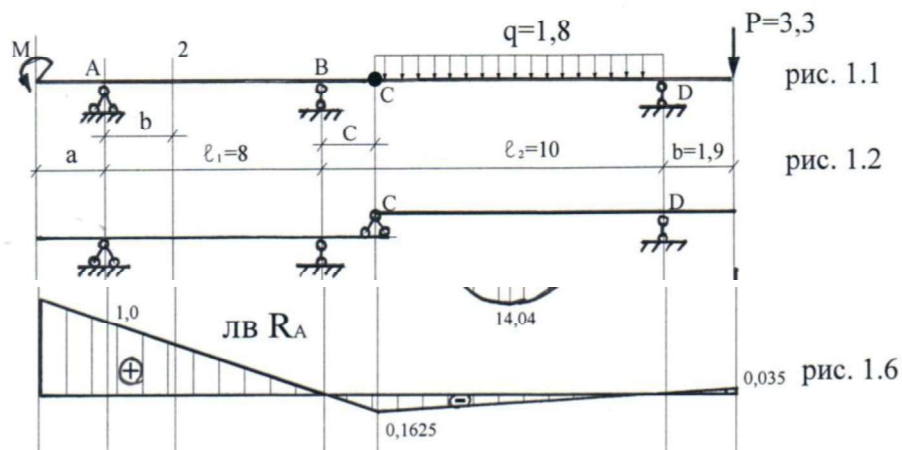
а) линию влияния опорной реакции R_A (рис. 1.6)

для построения линии влияния

- переносим опорную точку на этажную схему и видим, что рассматриваемая опорная точка принадлежит главному элементу ABC;
- рассматриваем элемент ABC как простую двухопорную балку с консолями

- для элемента ABC строим линию влияния опорной реакции как в простой балке – для этого воспользуемся таблицей 1, в которой соответствующая линия влияния опорной реакции в точке A приводится в первой ячейке третьего столбца (см. Таблицу 1): для построения линии влияния опорной реакции в простой балке достаточно на соответствующей опорной вертикали (проходящей через точку A) отложить ординату равную «1» и соединить ее нулем, расположенным на второй опорной вертикали простой балки. Полученную прямую линию следует продолжить в пределах консольных частей простой балки.

- учитываем взаимодействие элементов в многопролетной балке и продолжаем построение линии влияния в пределах вышележащего на этажной схеме элемента CD. Для этого соединяем крайнюю ординату линии влияния, построенной в пределах элемента ABC, имеющейся в виду ординату линии влияния расположенной под шарниром в точке C, с нулевой ординатой, расположенной под опорной точкой вышележащего на этажной схеме элемента, т.е. под точкой D, и продолжаем эту прямую линию до конца консоли элемента CD.



Таким образом, построена линия влияния опорной реакции в точке А.

Построим б) построение линии влияния поперечной силы в заданном сечении №2 (рис. 1.7)

для построения линии влияния поперечной силы в заданном сечении

- переносим заданное сечение на этажную схему и видим, что рассматриваемое сечение №2 находится в пролете главного элемента ABC;

-рассматриваем элемент ABC как простую двухопорную балку с консолями;

-для элемента ABC строим линию влияния поперечной силы в сечении №2 как в простой балке – для этого воспользуемся таблицей 1, в которой соответствующая линия влияния поперечной силы приводится в ячейке, расположенной в четвертой строке третьего столбца (см. Таблицу 1): для построения линии влияния поперечной силы в сечении, расположенном в пролете простой балки достаточно:

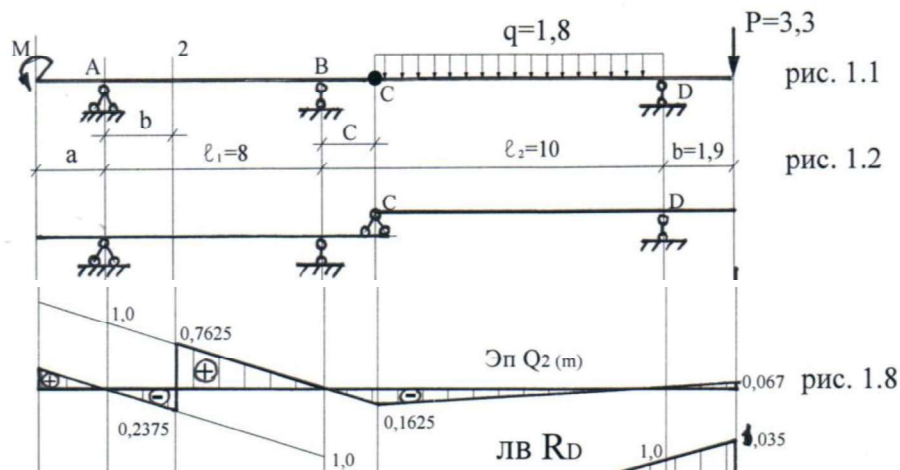
- на левой опорной вертикали отложить «+1» и соединить эту ординату с нулем на правой опорной вертикали;

-на правой опорной вертикали необходимо отложить «-1» и соединить эту ординату с нулем на левой опорной вертикали.

-Затем следует перенести на линию влияния сечение и в пределах пролета заштриховать полученную линию влияния от нуля на опорной вертикали до сечения (в результате образуются левая и правая ветви линии влияния). Полученные прямые линии следует продолжить в пределах консольных частей балки.

-учитываем взаимодействие элементов в многопролетной балке и продолжаем построение линии влияния в пределах вышележащего на этажной схеме элемента CD. Для этого соединяем крайнюю ординату линии влияния,

построенной в пределах элемента ABC (имеется в виду ордината линии влияния расположенная под шарниром в точке C), с нулевой ординатой, расположенной под опорной точкой вышележащего на этажной схеме элемента, т.е. под точкой D, и продолжаем эту прямую линию до конца консоли элемента CD.



Таким образом, построена линия влияния поперечной силы в заданном сечении №2.

в) построение линии влияния изгибающего момента в заданном сечении №2 (рис. 1.8).

для построения линии влияния изгибающего момента в заданном сечении

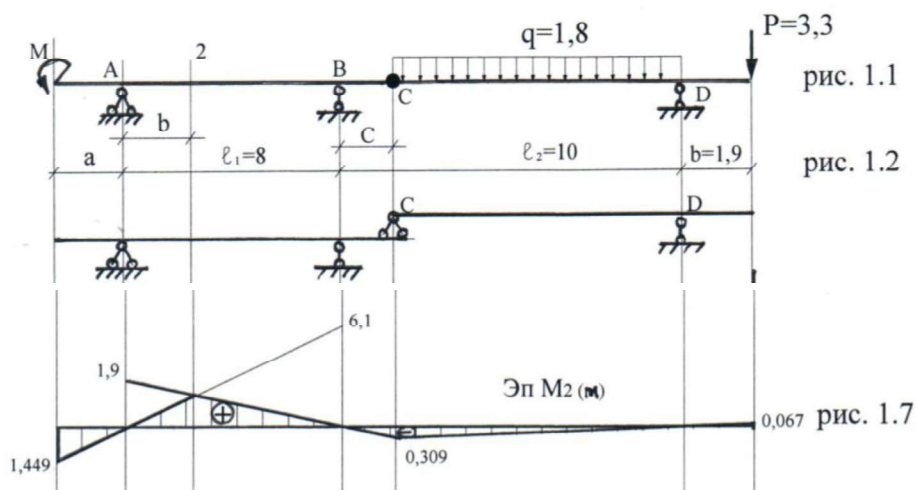
- переносим заданное сечение на этажную схему и видим, что

рассматриваемое сечение №2 находится в пролете главного элемента ABC;

-рассматриваем элемент ABC как простую двухопорную балку с консолями;

-для элемента ABC строим линию влияния изгибающего момента в сечении №2 как в простой балке — для этого воспользуемся таблицей 1, в которой соответствующая линия влияния изгибающего момента приводится в ячейке, расположенной в пятой строке третьего столбца (см. Таблицу 1); для построения линии влияния изгибающего момента в сечении, расположенном в пролете простой балки достаточно: на опорных вертикалях отложить расстояние от соответствующей опоры до сечения и соединить эти ординаты с нулевыми точками, расположенными на противоположных опорных вертикалях. В пересечении этих прямых линий и образуется линия влияния в пределах пролета. Для построения линии влияния в пределах консольных частей простой балки достаточно лишь продолжить полученные ветви линии влияния до конца каждой — левой и правой консоли.

-учитываем взаимодействие элементов в многопролетной балке и продолжаем построение линии влияния в пределах вышележащего на этажной схеме элемента CD. Для этого соединяем крайнюю ординату линии влияния, построенной в пределах элемента ABC (имеется в виду ордината линии влияния расположенная под шарниром в точке C), с нулевой ординатой, расположенной под опорной точкой вышележащего на этажной схеме элемента, т.е. под точкой D, и продолжаем эту прямую линию до конца консоли элемента CD.



Таким образом, построена линия влияния изгибающего момента в заданном сечении №2.

4. Определение усилий по линиям влияния.

По линиям влияния определим значения опорной реакции, M и Q в заданном сечении от действия заданной нагрузки, для этого воспользуемся выражением:

$$S = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot \omega_i + \sum M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i$$

где: S – любое усилие или опорная реакция,

P_i – приложенная заданная сосредоточенная сила,

y_i – ордината линии влияния, расположенная под точкой приложения силы

q_i – заданная равномерно распределенная нагрузка,

ω_i – площадь участка линии влияния, расположенного под равномерно распределенной нагрузкой.

M_i - заданный сосредоточенный момент, принимается со знаком «+», если момент направлен по ходу часовой стрелки,

$tg\alpha_i$ – тангенс угла наклона участка линии влияния, расположенного под точкой приложения момента принято считать положительным, если угол α_i отсчитывается от горизонтали против хода часовой стрелки.

В соответствии с вышеизложенным, определяем по линиям влияния опорную реакцию и заданные внутренние усилия, все геометрические параметры т.е. ординаты линий влияния, площади соответствующих участков и тангенс угла наклона участка линии влияния определяем из подобия треугольников и других геометрических соотношений :

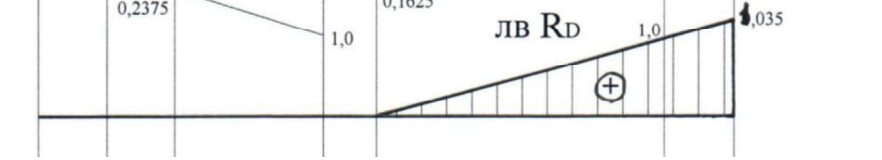
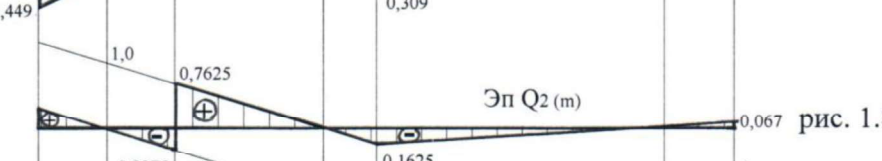
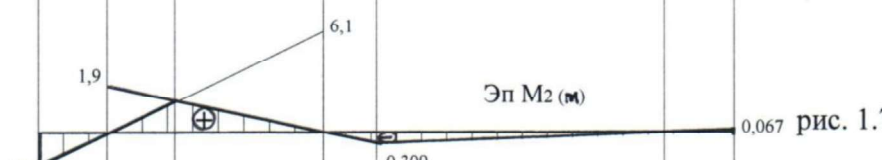
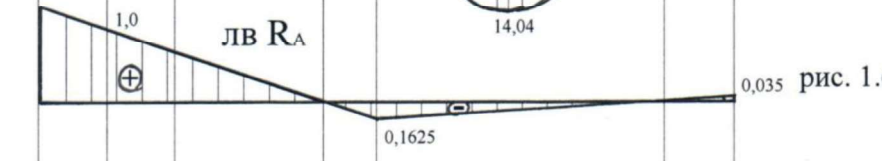
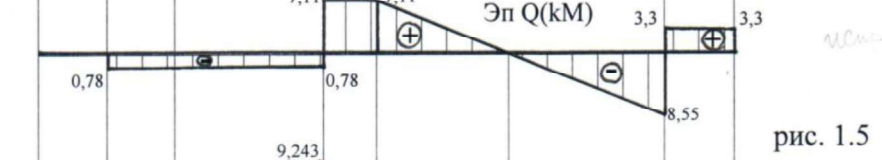
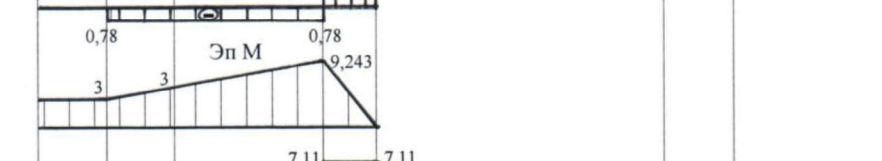
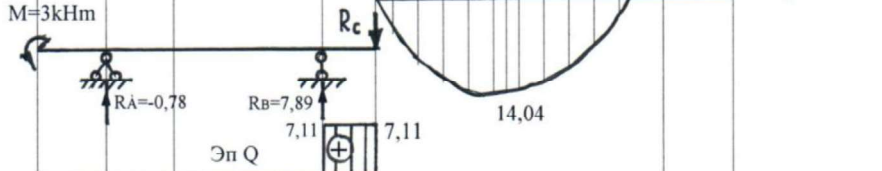
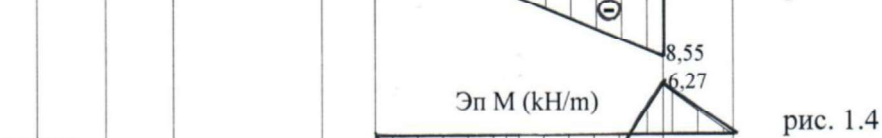
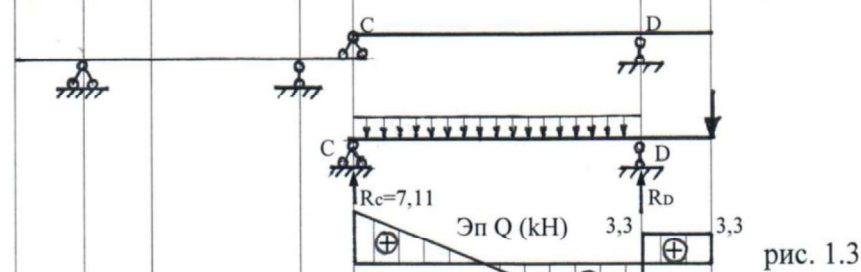
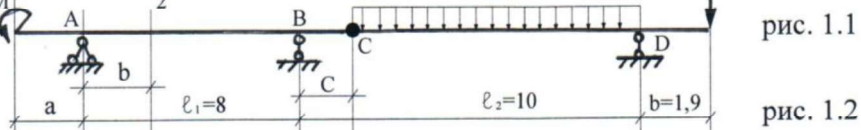
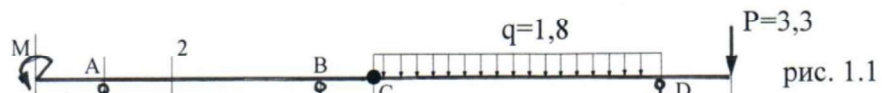
$$R_A = 3 \cdot \frac{1}{8} + 3,3 \cdot 0,035 + 1,8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8,7 \cdot (-0,1625) \right) = -0,78 \text{ (кН)}$$

$$Q_2 = 3 \cdot \frac{1}{8} + 3,3 \cdot 0,035 + 1,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,7 \cdot (-0,1625) = -0,78 \text{ (кН)}$$

$$M_2 = 3 \cdot \left(-\frac{6,1}{8} \right) + 3,3 \cdot 0,067 + 1,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,7 \cdot (-0,309) = -4,484 \text{ (кНм)}$$

5. Сопоставление результатов расчета:

Усилие	Результат аналитического расчета	Результат расчета по линии влияния	Расхождени е результатов расчета %
R_A	-0,78	-0,78	0,0
M_K	-0,78	-0,78	0,0
Q_K	-4,484	-4,484	0,0



**Вопросы к самопроверке по теме:
«Расчет статически определимых балок».**

1. Какая система называется статически определимой многопролетной балкой
2. Как может быть образована многопролетная шарнирная балка из неразрезной балки? Как определяется количество шарниров, необходимое для преобразования неразрезной балки в многопролетной шарнирной балке
3. Какие правила следует соблюдать при постановке промежуточных шарниров?
4. Достоинства и недостатки многопролетной шарнирной балки.
5. Какие типы элементов выделяют в многопролетной шарнирной балке?
6. Что представляет собой этажная схема взаимодействия элементов? Каков порядок ее построения?
7. Как производится аналитический расчет статически определимых многопролетных шарнирных балок на действие постоянных нагрузок?
8. Как определяются опорные реакции в простой шарнирноопертой балке?
9. Как проверяется правильность определения опорных реакций?
10. Как определяется величина поперечной силы в сечении? Какое правило знаков принято при определении поперечной силы в сечении?
11. Как определяется величина изгибающего момента в сечении? Какое правило знаков принято при определении изгибающего момента в сечении?
12. В чем состоит теорема Журавского о дифференциальной зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью равномерно-распределенной нагрузки?
13. Как производится проверка правильности построения эпюр поперечной силы и изгибающего момента на основании теоремы Журавского?
14. Что называется линией влияния?
15. Что представляет собой каждая ордината линии влияния?
16. В чем состоит принципиальное отличие линии влияния от эпюры?
17. Сформулируйте правило построения линии влияния опорной реакции в многопролетной шарнирной балке.
18. Сформулируйте правило построения линии влияния внутренних силовых факторов (поперечной силы, изгибающего момента) в заданном сечении многопролетной шарнирной балки.
19. Как определяется по линии влияния усилие в заданном сечении от действия сосредоточенной силы? Какие правила знаков при этом соблюдаются?
20. Как определяется по линии влияния усилие в заданном сечении от действия равномерно-распределенной нагрузки? Какие правила знаков при этом соблюдаются?
21. Как определяется по линии влияния усилие в заданном сечении от действия сосредоточенного момента? Какие правила знаков при этом соблюдаются?

Задача №2

Расчёт трехшарнирной арки

Для сплошной трехшарнирной арки требуется:

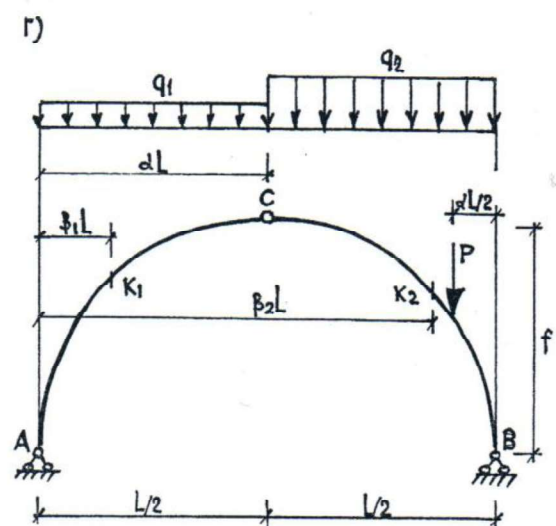
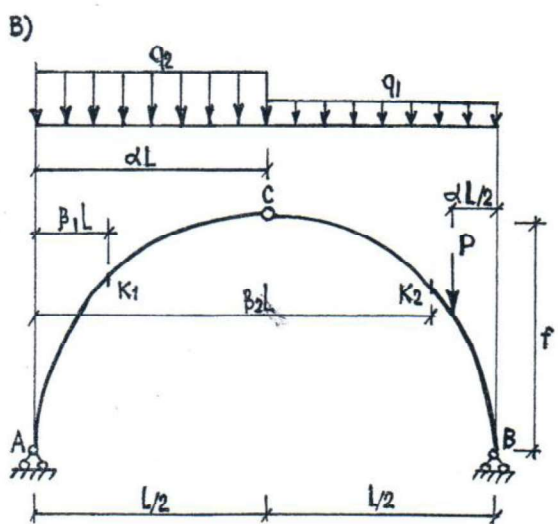
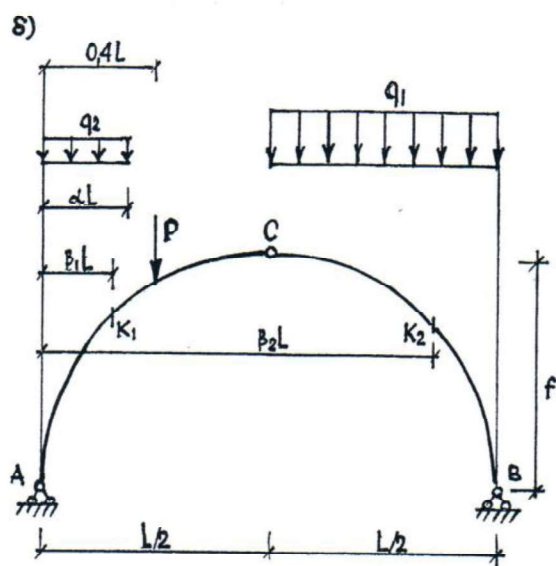
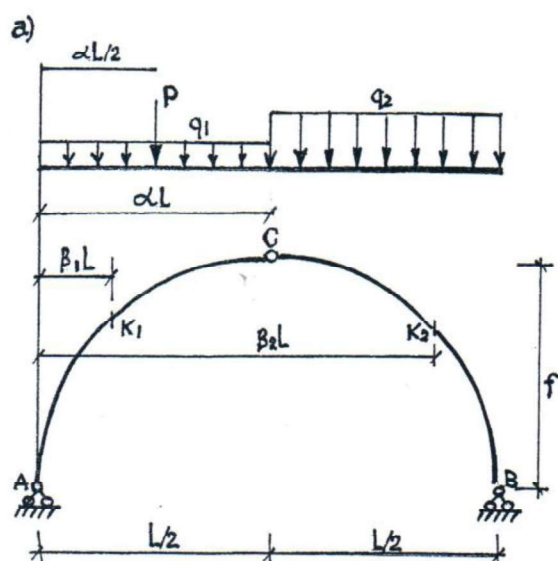
а) определить аналитически моменты, поперечные и нормальные силы в сечениях K_1 и K_2 от действия постоянной нагрузки.

б) построить линии влияния M , Q и N для сечения K_2 и по ним найти значения M , Q и N от той же постоянной нагрузки.

Таблица 1.

Исходные данные

Первая цифра шифра	$l, м$	α	β_1	Вторая цифра шифра	β_2	$q_1, кН/м$	$q_2, кН/м$	Последняя цифра шифра	№ схемы	Очертание оси	$\frac{f}{l}$	$P, кН$
1	26	0,20	0,20	1	0,65	0	4	1	а	парабола	0,34	12
2	36	0,50	0,30	2	0,68	4	0	2	а	окружность	0,35	10
3	18	0,30	0,22	3	0,70	0	5	3	б	парабола	0,39	8
4	28	0,60	0,25	4	0,72	5	0	4	в	окружность	0,40	12
5	20	0,40	0,15	5	0,80	0	6	5	г	парабола	0,32	20
6	32	0,70	0,40	6	0,84	6	0	6	а	окружность	0,36	12
7	22	0,80	0,35	7	0,86	7	0	7	а	парабола	0,38	10
8	34	0,25	0,12	8	0,75	0	7	8	б	окружность	0,33	10
9	24	0,35	0,33	9	0,85	8	0	9	в	парабола	0,30	18
0	30	0,45	0,45	0	0,90	0	8	0	г	окружность	0,31	12

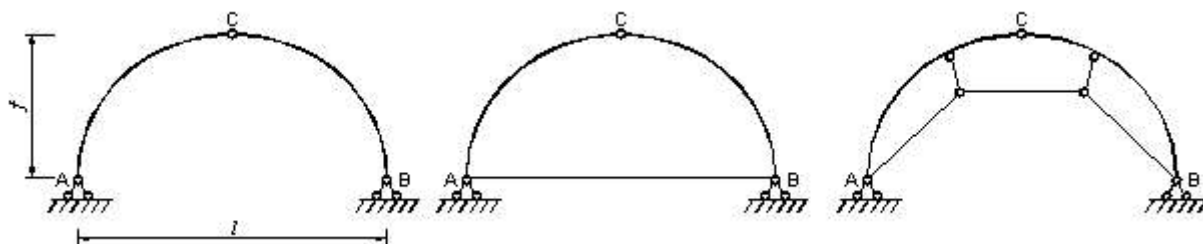


Схемы к задаче №2

Расчет трехшарнирных арок

Трехшарнирной аркой (рамой) называется статически определимая распорная система, состоящая из двух полуарок (полурам), соединенных между собой и с поверхностью земли шарнирами.

Арка – распорная система, имеющая форму кривого стержня, обращенная выпуклостью навстречу действию основной нагрузки:



Выделяют следующие элементы арки: левая полуарка AC и правая полуарка CB, пятовые (опорные) шарниры в точках A и B, ключевой шарнир в точке C, затяжка – элемент, соединяющий опорные шарниры A и B, подвески – элементы, поддерживающие затяжку. Основными геометрическими параметрами арки являются: пролет (или длина пролета) - l и стрела подъема (или высота арки в ключе) - f .

Очертание арки может быть произвольным, рациональным, но чаще всего ось арки задается очерченной по закону квадратной параболы или окружности. При очертании оси арки:

а) по закону квадратной параболы

- уравнение оси имеет вид: $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$

- тангенс угла наклона касательной к оси арки $\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} (l-2x)$

б) по закону окружности

- уравнение оси имеет вид $y = \sqrt{R^2 - (l/2 - x)^2} - R + f$, где $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$,

- синус угла наклона касательной к оси арки $\sin \varphi = \frac{l-2x}{2R}$,

- косинус угла наклона касательной к оси арки

$$\cos \varphi = \frac{y + R - f}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - (l/2 - x)^2}}{R}$$

Трехшарнирные системы являются распорными, т.е. под действием нагрузки любого типа (вертикальной или горизонтальной) в них возникают горизонтальные составляющие опорных реакций - распор, которые принято обозначать символом «Н».

Аналитический расчет трехшарнирных систем.

Целью аналитического расчета трехшарнирных систем является определение внутренних силовых факторов: поперечной силы, продольной силы, изгибающего момента.

Аналитический расчет начинают с определения опорных реакций. Для определения вертикальных составляющих опорных реакций составляют уравнения статического равновесия. Сумма моментов всех сил, приложенных к арке, относительно пятовых (опорных) шарниров равна нулю:

$$\sum M_A = 0;$$

$$\sum M_B = 0;$$

Для проверки найденных вертикальных составляющих опорных реакций воспользуемся условием статического равновесия – сумма проекций всех сил приложенных на вертикальную ось равна нулю:

$$\sum Y = 0$$

Для определения горизонтальных составляющих опорных реакций воспользуемся условием равенства нулю суммы моментов всех сил, приложенных к левой полуарке и правой полуарке, относительно ключевого шарнира:

$$\sum M_C^{лев} = 0;$$

$$\sum M_C^{прав} = 0;$$

из последних уравнений величину распора Н выразим в виде равенства:

$$H = \frac{M_C^0}{f}$$

где

- M_C^0 - «балочный» изгибающий момент относительно ключевого сечения С, т.е. изгибающий момент определенный в соответствующей арке балке. Соответствующая арке балка - это балка, которая перекрывает такой же пролет и несет такую же нагрузку, как и рассчитываемая арка.

- f - стрела подъема арки.

Для проверки правильности определения горизонтальных составляющих опорных реакций воспользуемся условием статического равновесия – сумма проекций всех сил приложенных на горизонтальную ось равна нулю:

$$\sum X = 0$$

Определение внутренних силовых факторов в сечении арки

Поперечная сила в сечении к- Q_K определяется как алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных по одну сторону от сечения на ось, перпендикулярную касательной, проведенной к оси арки в сечении K (на плоскость сечения):

$$Q = Q_K^0 \cos \varphi - H \sin \varphi ,$$

где Q_K^0 - балочная поперечная сила в сечении K , φ - угол наклона касательной, проведенной к оси арки в сечении K .

Поперечная сила считается положительной, если стремится повернуть отсеченный элемент по ходу часовой стрелки.

Изгибающий момент в сечении K - M_K - определяется как алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных по одну сторону от сечения, относительно центра сечения:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K ,$$

где:

M_K^0 - балочный изгибающий момент в рассматриваемом сечении K ,

H - распор,

y_K - ордината сечения к.

Изгибающий момент в сечении M_K считается положительным, если создающая его сила стремится повернуть отсеченный элемент таким образом, что растянутыми оказываются нижние волокна элемента.

Продольная (нормальная) сила в сечении K - N_K - определяется как алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных по одну сторону от сечения на касательную, проведенную к оси арки в сечении к (на нормаль к плоскости сечения):

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi + H \cos \varphi) ,$$

где:

Q_K^0 - балочная поперечная сила в сечении K ,

φ - угол наклона касательной, проведенной к оси арки в сечении к,

H - распор.

Продольная сила считается положительной, если стремится растянуть отсеченный элемент.

Анализ выражений внутренних усилий в арке позволяет сделать следующие выводы:

Изгибающий момент в арке меньше изгибающего момента в соответствующем сечении балки.

Поперечная сила в арке меньше поперечной силы в соответствующем сечении балки.

Продольная сила в арке оказывает только сжимающее действие.

Заключения о достоинствах и недостатках трехшарнирных арок.

На основании вышеизложенных выводов можно сделать заключения о достоинствах и недостатках трехшарнирных арок:

1. По величине и знаку усилий трехшарнирные конструкции выгодно отличаются от всех прочих пролетных конструкций: позволяют использовать малопрочные местные природные и искусственные каменные материалы: известняк, ракушечник, кирпич, низкомарочный бетон и т.д.
2. Значительная величина распора (особенно в пологих арках) требует устройства особо прочных опорных узлов или установки затяжки.
3. При монолитном исполнении проявляется основной технологический минус – необходимость устройства несущего каркаса опалубки. При сборном исполнении проявляется положительное качество: конструкция состоит из двух элементов, которые легко изготавливаются в заводских условиях, транспортируются и монтируются на строительной площадке.
4. Трехшарнирные конструкции не чувствительны к осадке опор, воздействию температуры, усадочных напряжений.

Построение линий влияния изгибающего момента, поперечной силы и продольной силы в арке.

Линией влияния называется графическое изображение закона изменения усилия в заданном сечении, при перемещении по арке силы $P=1$.

- 1) Построение линий влияния в арке начинают с построения линии влияния горизонтальной составляющей опорных реакций – распора H. Согласно

определению – линия влияния – это графическое изображение закона изменения заданного усилия в рассматриваемом сечении при перемещении единичной силы $P=1$ по сооружению. Что бы графически изобразить закон изменения усилия, необходимо выявить этот закон аналитически, так как распор определяется по формуле $H = \frac{M_C^0}{f}$, графическое изображение последнего выражения и будет представлять собой линию влияния H . В смысле построения линии влияния выражение для определения распора представим в виде:

$$л.в. H = \frac{л.в. M_C^0}{f}$$

Последнее выражение можно прочесть следующим образом: *линия влияния горизонтальной составляющей опорной реакции (распора) повторяет линию влияния балочного изгибающего момента в сечении C , все ординаты которой умножены на $1/f$ (где f – стрела подъема арки или высота арки в ключе).*

2) Построение линии влияния арочной поперечной силы Q_K в сечении K .

Выражение для определения арочной поперечной силы имеет следующий вид:

$$Q_K = Q_K^0 \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K$$

Для построения линии влияния выражение для определения поперечной силы представим в виде:

$$л.в. Q_K = л.в. Q_K^0 \cdot \cos \varphi_K + л.в. (-H) \cdot \sin \varphi_K$$

Т.е., *линия влияния арочной поперечной силы представляет собой результат суммирования ординат двух линий влияния: линии влияния балочной поперечной силы Q_K^0 , все ординаты которой умножены на значение косинуса угла наклона касательной в сечении K , и линии влияния распора H , все ординаты которой взяты с противоположным знаком и умножены на значение синуса угла наклона касательной в сечении K .*

При суммировании линий влияния достаточно складывать лишь характерные ординаты, получаемые из подобия треугольников.

3) Построение линии влияния арочной продольной силы N_K в сечении K .

Выражение для определения арочной продольной силы имеет вид:

$$N_K = -(Q_K^0 \cdot \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K)$$

Для построения линии влияния выражение для определения продольной силы представим в виде:

$$л.в. N_K = л.в.(-Q_K^0) \cdot \sin \varphi_K + л.в.(-H) \cdot \cos \varphi_K$$

Т.е. *Линия влияния арочной продольной силы является результирующей суммы двух линий влияния: балочной поперечной силы Q_K^0 , все ординаты которой умножены на значение синуса угла наклона касательной в сечении K и распора H, все ординаты которой умножены на значение косинуса угла наклона касательной в сечении K, все ординаты необходимо взять с противоположным знаком.*

4) Построение линии влияния арочного изгибающего момента M_K в сечении K.

Выражение для определения арочного изгибающего момента имеет вид:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K$$

Для построения линии влияния выражение для определения изгибающего момента представим в виде:

$$л.в. M_K = л.в. M_K^0 + л.в.(-H) \cdot y_K$$

Т.е. *Линия влияния арочного изгибающего момента представляет собой сумму ординат двух линий влияния: балочного изгибающего момента M_K^0 в сечении K и линии влияния распора H, все ординаты которой умножены на значение ординаты сечения K и взяты с противоположным знаком.*

Как следует из вышеизложенного, построение линий влияния в арке основывается и производится на основании теории построения линий влияния в простой балке.

Определение усилий по линиям влияния.

С помощью линий влияния можно определять усилия в заданном сечении при любом приложении нагрузки. Определение усилий в арках от действия приложенной нагрузки по линии влияния производится так же, как при расчете усилий по линиям влияния в балках по известной формуле:

$$S_i = \pm \sum (P_i y_i) \pm \sum (q_i \varpi_i) \pm \sum (M_i \operatorname{tg} \alpha_i)$$

Пример расчёта трехшарнирной арки

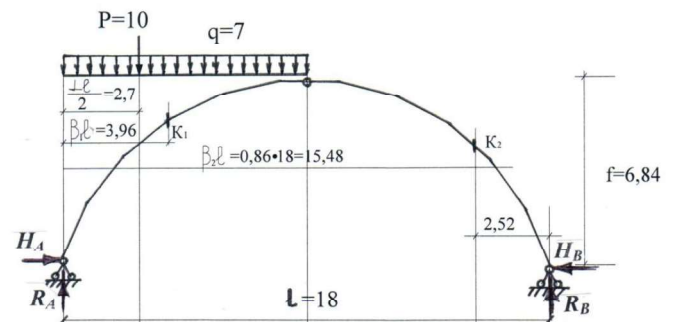
Для сплошной трехшарнирной арки требуется:

а) определить аналитически моменты, поперечные и нормальные силы в сечениях K_1 и K_2 от действия постоянной нагрузки.

б) построить линии влияния M , Q и N для сечения K_2 и по ним найти значения M , Q и N от той же постоянной нагрузки.

Исходные данные:

$L = 18\text{ м}$	$\beta_2 = 0,86$	Схема а
$a = 0,3$	$q_1 = 7\text{ кН/м}$	Очертание оси
$\beta_1 = 0,22$	$q_2 = 0\text{ кН/м}$	парабола
		$f/\ell = 0,38$
		$P = 10\text{ кН}$



Решение:

1. Так как арка очерчена по закону параболы, уравнение оси имеет вид:

$$y = \frac{4f}{l^2} x \cdot (l - x)$$

где: $f = l \cdot 0,3 = 6,84$

синус угла наклона касательной к оси арки

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

косинус угла наклона касательной к оси арки

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}},$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x)$

Определяем геометрические параметры сечения K_1 : $x_{K_1} = \beta_1 \cdot l = 3,96$

$$y_{K_1} = y = \frac{4f}{l^2} x \cdot (l - x) = \frac{4 \cdot 6,84}{18^2} \cdot 3,96(18 - 3,96) = 4,695$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = \frac{4 \cdot 6,84}{18^2} (18 - 2 \cdot 3,96) = 0,8512$$

$$\sin \varphi_{K_1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{0,8518}{\sqrt{1 + (0,8512)^2}} = 0,649$$

$$\cos \varphi_{K_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0,8512)^2}} = 0,761$$

Определяем геометрические параметры сечения K_2 : $x_{K_1} = \beta_2 \cdot l = 15,48$

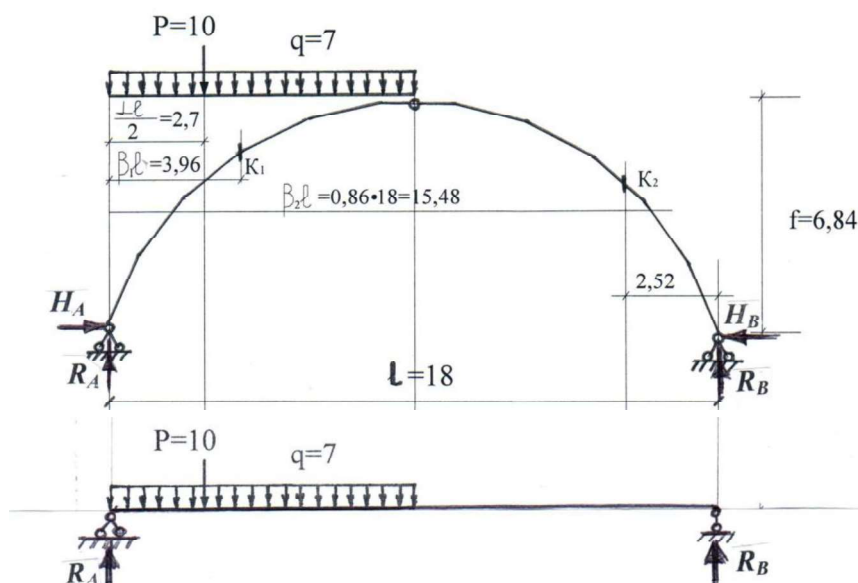
$$y_{K_1} = y = \frac{4f}{l^2} x \cdot (l - x) = \frac{4 \cdot 6,84}{18^2} \cdot 15,48(18 - 15,48) = 3,294$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{K_2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = \frac{4 \cdot 6,84}{18^2} (18 - 2 \cdot 15,48) = -1,094$$

$$\sin \varphi_{K_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{-1,094}{\sqrt{1 + (-1,094)^2}} = -0,738$$

$$\cos \varphi_{K_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (-1,094)^2}} = 0,674$$

3. В основе расчета трехшарнирной арки лежит расчет соответствующей арке балки, т.е. балки, которая перекрывает пролет той же длины и несет такую же нагрузку:



Определяем балочные опорные реакции:

$$\sum M_A = 0 \quad R_B \cdot l - P \cdot 2,7 - q \cdot 9 \cdot 4,5 = 0; \quad R_B = \frac{10 \cdot 2,7 + 7 \cdot 9 \cdot 4,5}{18} = 17,25$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_A \cdot l - P \cdot 15,3 - q \cdot 9 \cdot 13,5 = 0; \quad R_A = \frac{10 \cdot 15,3 + 7 \cdot 9 \cdot 13,5}{18} = 55,75$$

$$\sum Y = 0 \quad R_A + R_B - q \cdot 9 - P = 0; \quad 55,75 + 17,25 - 7 \cdot 9 - 10 = 73 - 73 = 0$$

4. Определяем горизонтальные составляющие опорных реакций - распор:

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{R_B \cdot \frac{\ell}{2}}{f} = \frac{17,25 \cdot 9}{6,84} = 22,697$$

5. Определяем балочные значения поперечной силы и изгибающего момента в заданных сечениях от действия заданной нагрузки

$$M_{K_1}^0 = R_A \cdot 3,96 - q \cdot \frac{(3,96)^2}{2} - P \cdot (3,96 - 2,7) = 55,75 \cdot 3,96 - 7 \cdot \frac{(3,96)^2}{2} - 10 \cdot 1,26 = 153,284 (\kappa Hm)$$

$$Q_{K_1}^0 = R_A - q \cdot 3,96 - P = 55,75 - 7 \cdot 3,96 - 10 = 18,03 (\kappa H)$$

$$M_{K_2}^0 = R_B \cdot 2,52 = 17,25 \cdot 2,52 = 43,47$$

$$Q_{K_2}^0 = -R_B = -17,25$$

6. Определяем арочные значения поперечной силы, изгибающего момента и нормальной (продольной) силы в заданных сечениях от действия заданной нагрузки:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K$$

$$Q_K = Q_K^0 \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K$$

$$N_K = -(Q_K^0 \cdot \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K)$$

$$M_{K_1} = 153,284 - 22,697 \cdot 4,695 = 46,721 (\kappa Hm)$$

$$Q_{K_1} = 18,03 \cdot 0,761 - 22,697 \cdot 0,649 = -1,01 (\kappa H)$$

$$N_{K_1} = -(18,03 \cdot 0,649 + 22,697 \cdot 0,761) = -28,974 (\kappa H)$$

$$M_{K_2} = 43,47 - 22,697 \cdot 3,294 = -31,294 (\kappa Hm)$$

$$Q_{K_2} = -17,25 \cdot 0,674 - 22,697 \cdot (-0,738) = 5,124 (\kappa H)$$

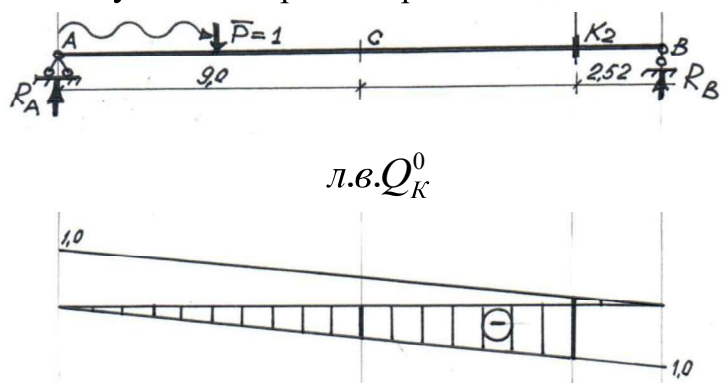
$$N_{K_2} = -(-17,25 \cdot (-0,738) + 22,697 \cdot 0,674) = -28,028 (\kappa H)$$

7. Построение линии влияния в арке.

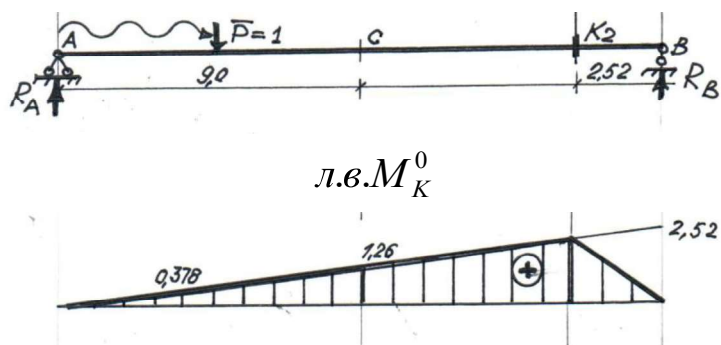
Построение линий влияния в арке производится на основе построения линий влияния в балке, соответствующей заданной арке, - т.н. линии влияния балочных внутренних силовых факторов - балочной поперечной силы Q_K^0 и балочного изгибающего момента M_K^0 в заданном сечении « K_2 »

Для построения линии влияния балочной поперечной силы в заданном сечении « K_2 » - л.в. Q_K^0 - достаточно: на левой опорной вертикали отложить ординату, равную «+1» и соединить ее с нулем на правой опорной вертикали;

затем на правой опорной вертикали отложить ординату, равную «-1» и соединить ее с нулем на левой опорной вертикали; через сечение «К₂» провести вертикальную линию и заштриховать в полученном построении левую и правую ветви линии влияния – от нуля на опорной вертикали до сечения.



Для построения линии влияния балочного изгибающего момента в заданном сечении К₂ - $л.в. M_K^0$ - достаточно : на левой опорной вертикали отложить ординату, равную расстоянию от левой опоры до сечения и соединить ее с нулем на правой опорной вертикали; затем на правой опорной вертикали отложить ординату, равную расстоянию от правой опорной вертикали до сечения «К₂» и соединить ее с нулем на левой опорной вертикали; через сечение «К₂» провести вертикальную линию и заштриховать в полученном построении левую и правую ветви линии влияния – от нуля на опорной вертикали до сечения. Так как ветви линии влияния балочного изгибающего момента в заданном сечении К₂ пересекаются под сечением, для построения достаточно построить одну из ветвей линии влияния, например, левую, отложив для этого на правой опорной вертикали расстояние от правой опоры до сечения «К₂», в рассматриваемом примере равное 2,52м, а затем перенести на линию влияния сечение. Ординату линии влияния под сечением соединить с нулем на правой опорной вертикали.



Построение линии влияния распора:

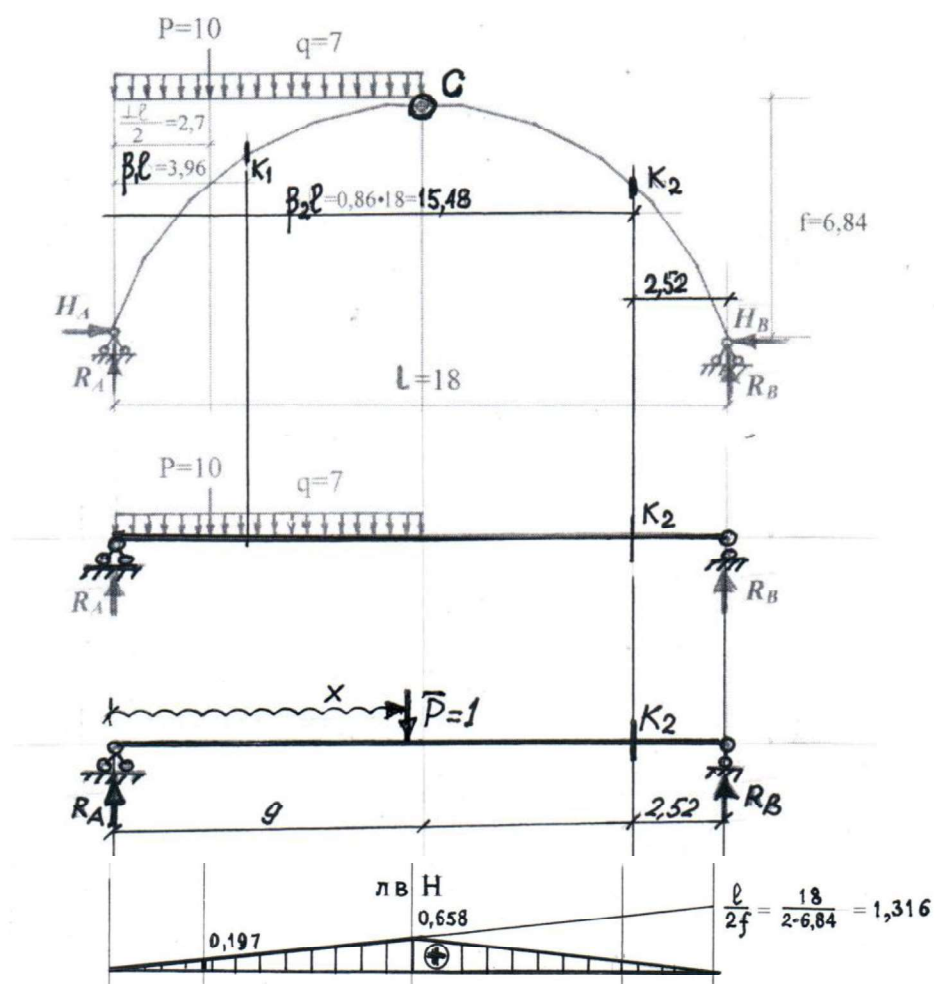
Линия влияния распора повторяет линию влияния балочного изгибающего момента в сечении С, все ординаты которой уменьшены в « f » раз, где f —

стрела подъема арки:

$$H = \frac{M_c^0}{f}$$

$$л.в. H = \frac{л.в. M_C^0}{f}$$

Для построения линии влияния балочного изгибающего момента в сечении «С» достаточно на опорных вертикалях отложить расстояние от соответствующей опоры до сечения С т.е. половину длины пролета арки (т.е. 9м). Для построения линии влияния распора достаточно разделить последние ординаты на высоту арки в ключе (« $f=6,84$ »):

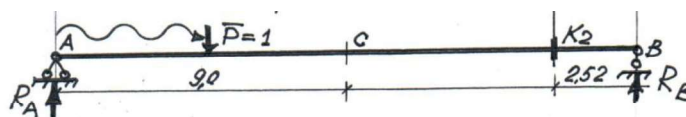


Построенная линия влияния распора используется в решении задачи для определения величины распора от действия приложенной нагрузки, а также для построения линий влияния внутренних усилий M , Q и N в заданном сечении арки « K_2 »:

8. Построение линий влияния М, Q и N в заданном сечении арки «K₂»:

а) линия влияния арочного момента представляет собой сумму ординат двух линий влияния: линии влияния балочного изгибающего момента в сечении K₂ и линии влияния распора Н, все ординаты которой взяты с обратным знаком и умножены на $U_{K2}=3,294м$:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K$$



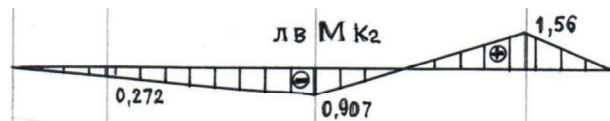
$$л.в. M_K^0$$



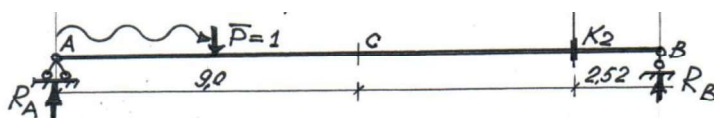
$$л.в. (-H) \cdot y_K$$



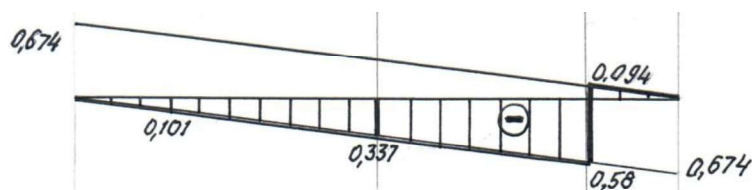
$$л.в. M_K = л.в. M_K^0 + л.в. (-H) \cdot y_K$$



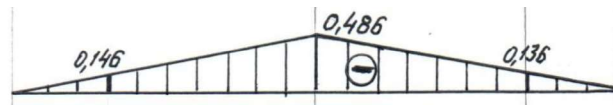
б) линия влияния арочной поперечной силы представляет собой сумму ординат двух линий влияния: линии влияния балочной поперечной силы в сечении K₂, все ординаты которой умножены на $\cos \varphi_{K2}=0,674$, и линии влияния распора Н, все ординаты которой взяты с обратным знаком и умножены на $\sin \varphi_{K2}=-0,738$: $Q_K = Q_K^0 \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K$



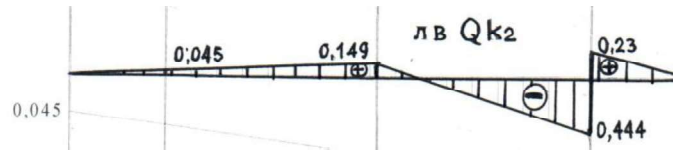
$$л.в. Q_K^0 \cdot \cos \varphi_K$$



$$л.в.(-H) \cdot \sin \varphi_K$$

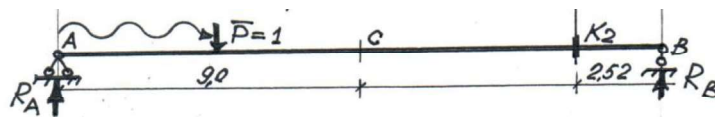


$$л.в.Q_K = л.в.Q_K^0 \cdot \cos \varphi_K + л.в.(-H) \cdot \sin \varphi_K$$

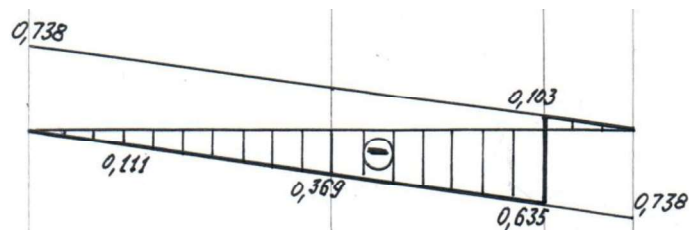


в) линия влияния арочной продольной силы представляет собой взятую с обратным знаком сумму ординат двух линий влияния: линии влияния балочной поперечной силы в сечении K_2 , все ординаты которой умножены на $\sin \varphi_{K_2} = -0,738$, и линии влияния распора H , все ординаты которой умножены на $\cos \varphi_{K_2} = 0,674$:

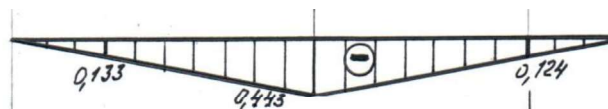
$$N_K = -Q_K^0 \cdot \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K$$



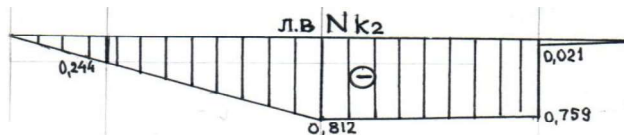
$$л.в.(-Q_K^0) \cdot \sin \varphi_K$$



$$л.в.(-H) \cdot \cos \varphi_K$$



$$л.в.N_K = л.в.(-Q_K^0) \cdot \sin \varphi_K + л.в.(-H) \cdot \cos \varphi_K$$



9. По линиям влияния определяем значения M, Q и N в сечении K_2 от постоянной нагрузки, для этого воспользуемся выражением:

$$S = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot \varpi_i;$$

где: S – любое усилие или опорная реакция,

P_i – приложенная заданная сосредоточенная сила,

y_i – ордината линии влияния под точкой приложения силы P_i ,

q_i – заданная равномерно распределенная нагрузка,

ϖ_i – площадь участка линии влияния, расположенного под равномерно распределенной нагрузкой.

Ординаты линий влияния определяем из подобия треугольников, используя в качестве отправных характерные (базовые) ординаты линий влияния. Площади соответствующих участков линий влияния определяются по известным геометрическим формулам:

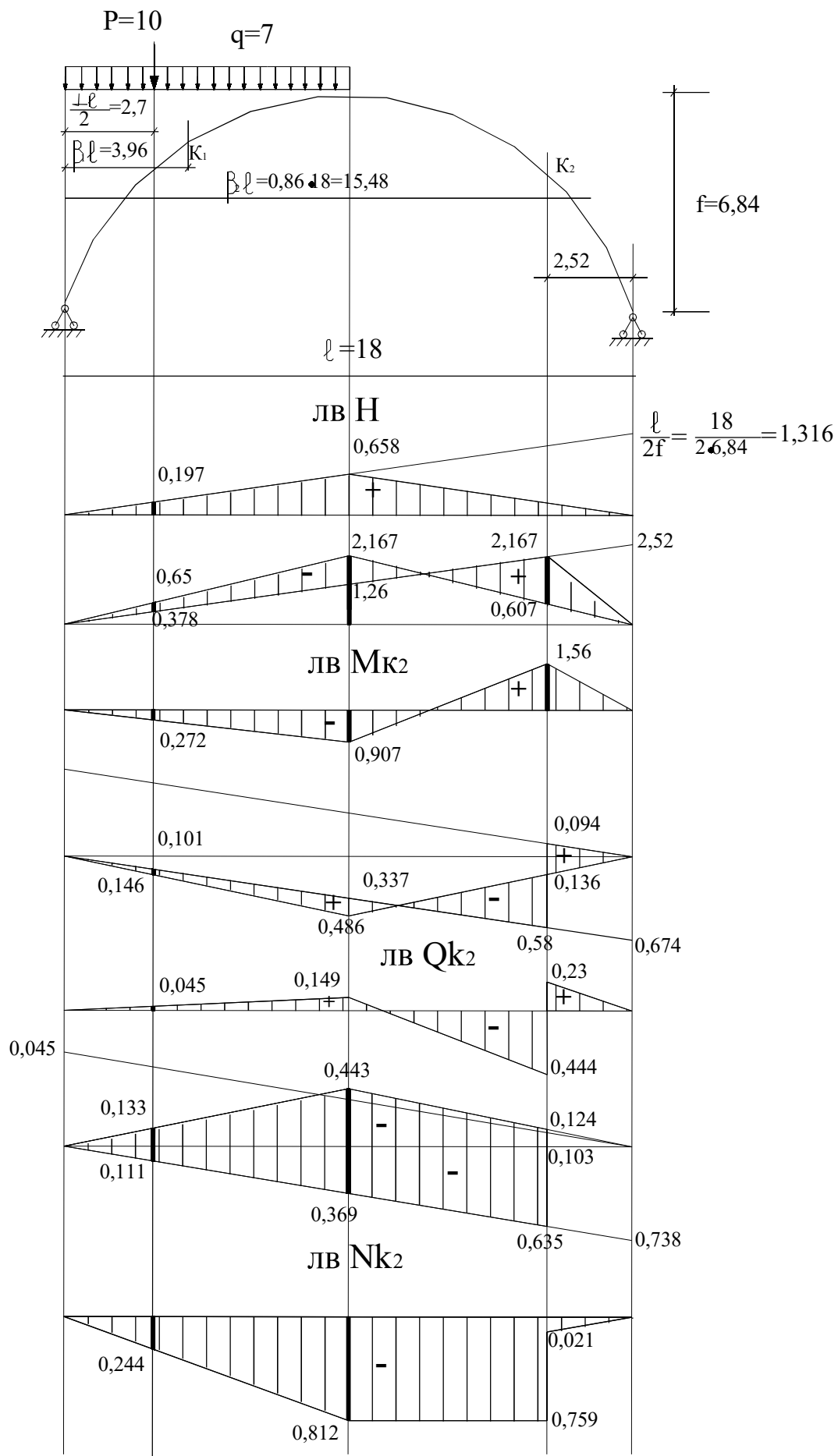
$$M_{K_2} = P(-0,272) + q \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,907) = 10 \cdot (-0,272) + 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,907) \cdot 9 = 31,2905 \text{ (кНм)}$$

$$Q_{K_2} = P \cdot 0,045 + q \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,149 \cdot 9 = 10 \cdot 0,045 + 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,149 \cdot 9 = 5,144 \text{ (кН)}$$

$$N_{K_2} = P \cdot (-0,244) + q \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,812) \cdot 9 = 10 \cdot (-0,244) + 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,812) \cdot 9 = -28,018 \text{ (кН)}$$

10. Сопоставим результаты расчета усилий в заданном сечении арки:

Усилие	Результат аналитического расчета	Результат расчета по линии влияния	Расхождение результатов расчета %
M_K	31,294	31,2905	0,011
Q_K	5,124	5,144	0,389
N_K	-28,028	-28,018	0,036



Вопросы к самопроверке по теме: «Расчет статически определимых арок».

1. Какая система называется трехшарнирной аркой?
2. В чем состоит основная особенность трехшарнирной арки?
3. Что представляет собой соответствующая арке балка?
4. Как определяются величины вертикальных составляющих опорных реакций в арке? Как проверяется правильность их определения?
5. Как определяются величины горизонтальных составляющих опорных реакций в арке? Как проверяется правильность их определения?
6. Что представляет собой распор? Из какого условия определяется величина распора?
7. Что представляет собой мгновенная ось арки в рассматриваемом сечении?
8. Как определяется положение мгновенной оси арки в рассматриваемом сечении?
9. Как определяется величина изгибающего момента в заданном сечении трехшарнирной арки?
- Что представляет собой балочный изгибающий момент в заданном сечении ?
10. Как определяется величина поперечной силы в заданном сечении трехшарнирной арки?
11. Что представляет собой балочная поперечная сила в заданном сечении?
12. Как определяется величина продольной силы в заданном сечении трехшарнирной арки?
13. Как производится построение линии влияния распора в трехшарнирных арках?
14. Как производится построение линии влияния изгибающего момента в заданном сечении трехшарнирной арки?.
15. Как производится построение линии влияния поперечной силы в заданном сечении трехшарнирной арки?.
16. Как производится построение линии влияния продольной силы в заданном сечении трехшарнирной арки?.
17. Как производится расчет усилий в заданном сечении арки по линиям влияния от действия заданной постоянной нагрузки?
18. Какие выводы о свойствах, преимуществах и недостатках трехшарнирных систем из можно сделать на основании аналитического расчета трехшарнирных арок?

Задача 3

Расчёт простой плоской статически определимой фермы

Для фермы с выбранным по шрифту из таблицы размерами и нагрузкой требуется:

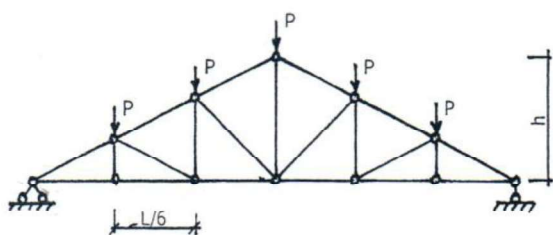
- 1) Определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели, включая правую стойку (4 стержня);
- 2) Построить линии влияния в тех же стержнях;
- 3) По линиям влияния подсчитать значения усилий от заданной нагрузки и сравнить их со значениями, полученными аналитическими.

Таблица 1

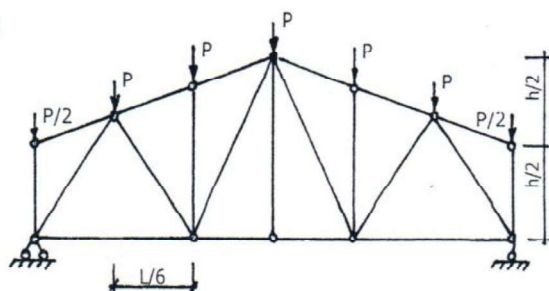
Исходные данные

Первая цифра шифра	$l, м$	$P, кН$	Вторая цифра шифра	№ панели (считая слева)	Последняя цифра шифра № схемы	$h, м$
1	24	1,8	1	2	1	3
2	28	1,5	2	3	2	4
3	24	1,2	3	4	3	3,2
4	24	1,0	4	5	4	3,2
5	30	1,9	5	2	5	6
6	18	2,0	6	3	6	3
7	30	1,1	7	4	7	4
8	36	1,3	8	5	8	4,5
9	24	1,4	9	2	9	3,6
0	30	1,6	0	3	0	4,4

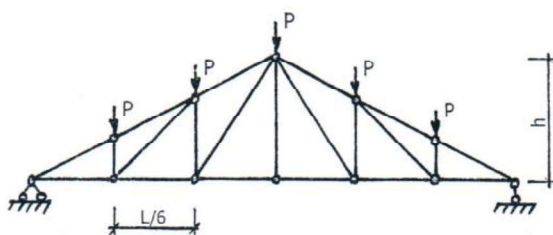
1)



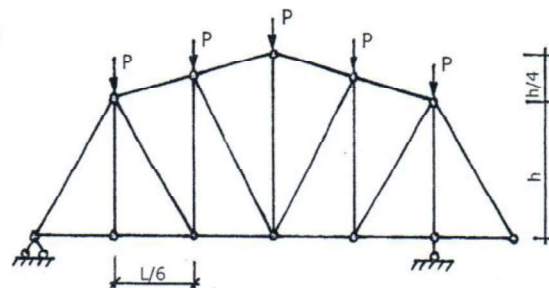
6)



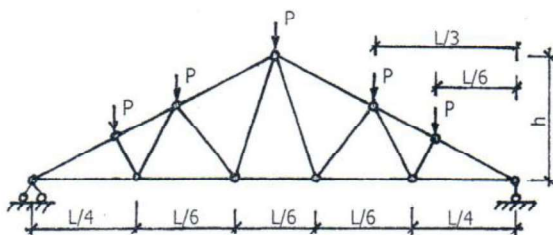
2)



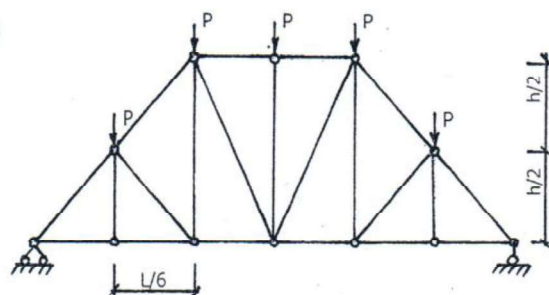
7)



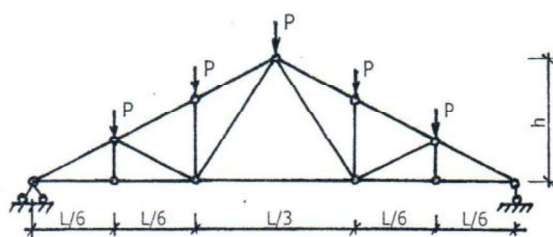
3)



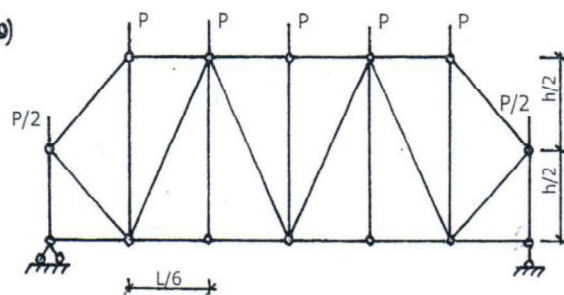
8)



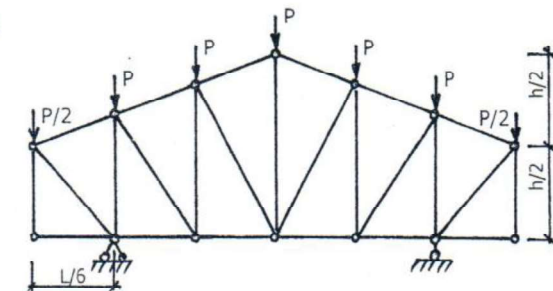
4)



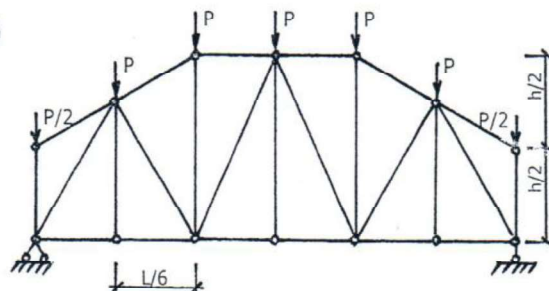
9)



5)



10)



Схемы к задаче №3

СТАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПЛОСКИЕ БАЛОЧНЫЕ ФЕРМЫ

Фермой называется стержневая система, которая остается геометрически неизменяемой после условной замены в расчетной схеме жестких узлов идеальными шарнирами.

Преимущества ферм по сравнению с балками очевидны:

- При узловом приложении нагрузки – стержни фермы работают на растяжение - сжатие.
- Напряжения распределяются равномерно.
- Уменьшается собственный вес конструкции.
- Увеличивается жесткость конструкции.
- Легкость, экономичность, возможность высокой заводской готовности.

1. Статический расчет ферм сводится к определению усилий во всех стержнях фермы.

В основу расчета ферм положены следующие упрощения:

- стержни в узлах фермы соединены идеальными шарнирами;
- фермы рассчитываются только на узловое приложение нагрузки, при этом стержни фермы работают только на растяжение сжатие, т.е. в стержнях ферм возникают только продольные силы N ;
- расчет начинают с определения опорных реакций. Опорные реакции в ферме определяются так же, как в балке. Для определения опорных реакций составляют уравнения статического равновесия: сумма моментов всех сил.

2. Определение усилий в стержнях простых ферм производится одним из двух основных методов: методом круговых сечений (его еще называют методом вырезания узлов) или методом сквозных сечений (его еще называют методом сечений)

1) **Метод вырезания узлов** (метод круговых сечений) – заключается в том, что производится вырезание узла, в котором сходятся не более двух неизвестных усилий. При этом в рассеченных стержнях «открываются» усилия – они обозначаются стрелками, направленными от узла вдоль оси соответствующего стержня – такое направление усилия принято считать положительным. Затем составляются уравнения статического равновесия: сумма проекций всех сил, приложенных к узлу, на любую ось должна равняться нулю:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

2) **Метод сквозных сечений** – заключается в том, что проводится сквозное сечение таким образом, чтобы рассеченными оказались не более трех стержней. При этом в рассеченных стержнях «открываются» усилия – они обозначаются стрелками, направленными от узла вдоль оси соответствующего стержня – такое направление усилия принято считать положительным. При этом возможны два основных способа определения усилий: способ моментной точки и способ проекций.

а) Если оси двух из трех рассеченных стержней, за исключением, того, усилие в котором определяется, пересекаются в одной точке К, то точка К называется моментной (в курсе теоретической механики ту же точку принято называть точкой Риттера). Относительно этой точки составляются уравнения статического равновесия: сумма моментов всех сил, приложенных по одну сторону от сечения, должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned}\sum M_{\text{к лев}} &= 0 \\ \sum M_{\text{к пр}} &= 0\end{aligned}$$

Такой способ определения усилий в стержнях фермы называется «способ моментной точки». Способ моментной точки является приоритетным, но в некоторых случаях положение моментной точки определить невозможно, в частности, если два других стержня параллельны.

В этом случае используется способ проекций:

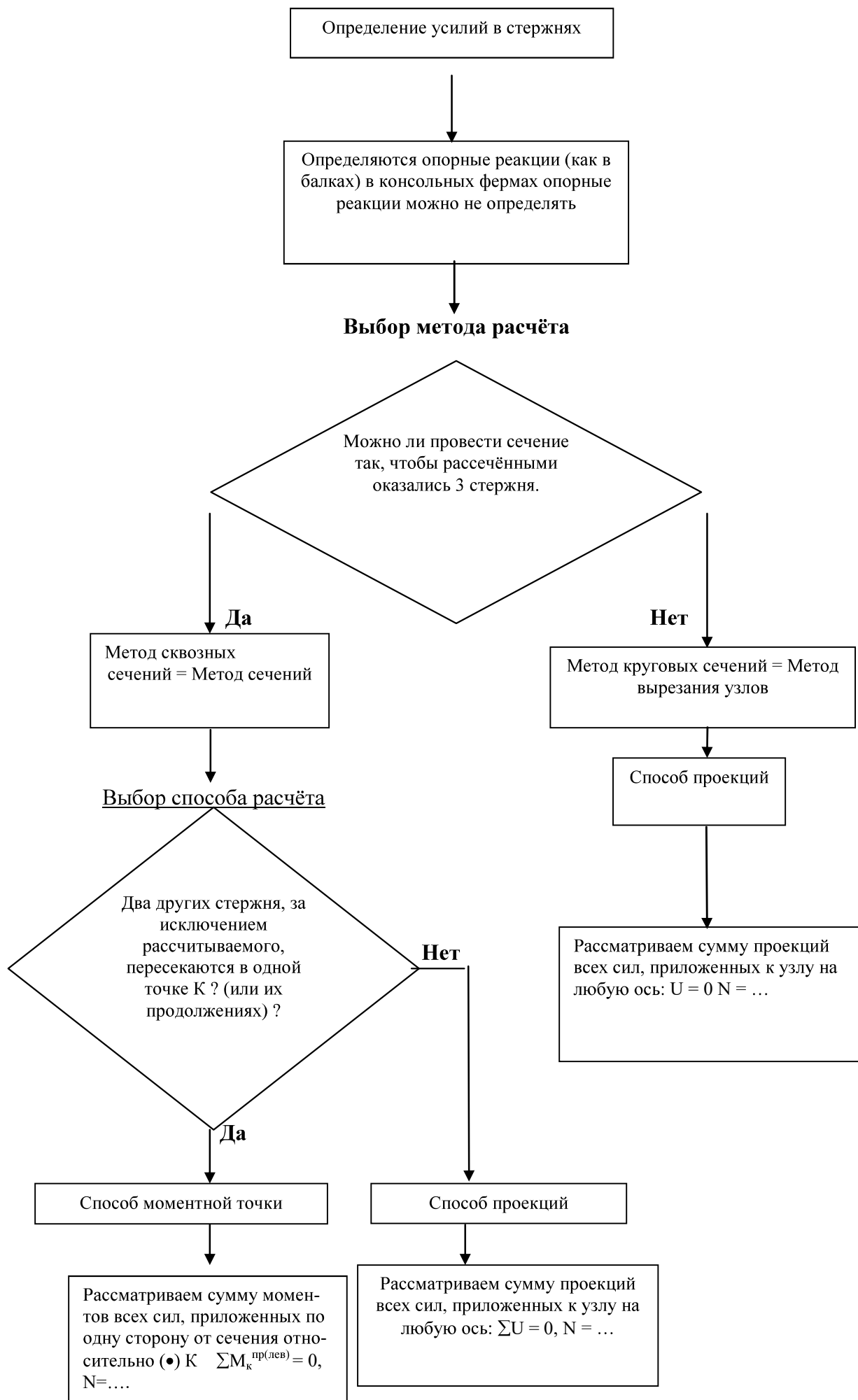
б) Способ проекций применяется для расчета в том случае, если два из трех рассеченных стержней, за исключением искомого, не пересекаются в одной точке, например в ферме с параллельными поясами. При этом составляют уравнения статического равновесия: сумма проекций всех сил, приложенных по одну сторону от сечения на любую ось:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0\end{aligned}$$

При расчете ферм предпочтение отдается методу сечений и способу моментной точки. Если оси двух стержней не пересекаются, используется способ проекций.

И только в том случае, если воспользоваться методом сечений невозможно, расчет проводят методом вырезания узлов. При этом составляют уравнения статического равновесия: сумма проекций всех сил, приложенных к узлу, на любую ось должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0\end{aligned}$$



Линии влияния в простых фермах

Линией влияния усилия в стержне фермы называется графическое изображение закона изменения усилия в заданном стержне при перемещении по грузовому поясу фермы силы $P=1$.

Что бы графически изобразить закон изменения усилия необходимо предварительно выявить этот закон аналитически, при этом используют те же методы и способы, что и при аналитическом расчёте усилий в стержнях ферм на действие постоянной нагрузки (смотрите блок-схему)

В основе построения линий влияния усилий в стержнях фермы лежат линии влияния опорных реакций.

Прежде чем графически изобразить закон изменения опорной реакции R_A при движении по ферме силы $P=1$, этот закон надо выявить аналитически. Для этого рассмотрим условие статического равновесия:

$$\sum M_b = R_a \cdot L - P \cdot (L - x) = 0$$

откуда выразим

$$R_a = \frac{P \cdot (L - x)}{L} = \frac{1(L - x)}{L} = \frac{L - x}{L} = 1 - \frac{x}{L}$$

Графиком последнего уравнения является прямая линия, для построения которой необходимо знать положение двух точек:

а) при $x=0$ $R_a=1$;

б) при $x=L$ $R_a=0$;

по полученным ординатам строим линию влияния опорной реакции R_a (рис 1а).

Аналогично

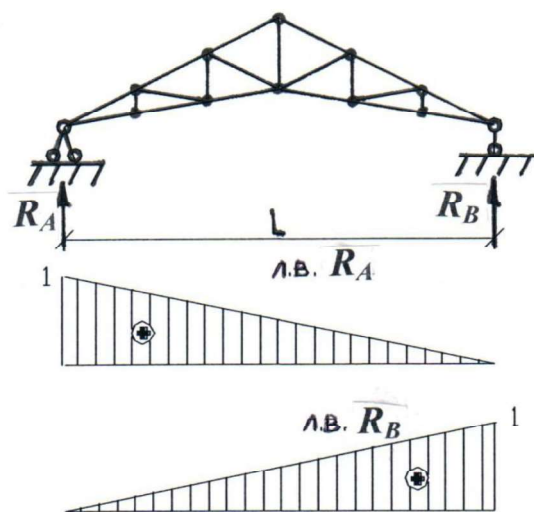


рис 1а

рис 1б

Вывод: линии влияния опорных реакций в фермах балочного типа не зависят от очертания решетки и строятся так же, как в простых балках. Можно сформулировать правило построения линий влияния опорных реакций в простых балочных фермах:

Для построения линии влияния опорной реакции в простой двухопорной балочной ферме с консолями или без консолей достаточно:

- на вертикали, проходящей через рассматриваемую опору, отложить «+1»;
- на вертикали, проходящей через другую опору, отложить «0»;
- соединить построенные точки прямой линией. Если ферма имеет консоли, следует продолжить эту линию в пределах всей фермы, т.е. до вертикалей, проходящих через концы консолей.

Линии влияния усилий в стержнях

Линия влияния - это графическое изображение закона изменения усилия в заданном стержне фермы при перемещении по грузовому поясу силы $P=1$.

Что бы графически изобразить закон изменения усилия необходимо предварительно выявить этот закон аналитически, при этом используются те же методы и способы, что и при аналитическом расчёте усилий в стержнях ферм на действие постоянной нагрузки, т.е. метод сечений или метод вырезания узлов. Приоритетным является метод сечений.

Особенностью построения линий влияния в фермах является то, что единичная сила прикладывается только в узлах фермы.

Очертание линии влияния в ферме зависит не только от перемещения силы по сооружению, но в значительной степени также от того, по какому поясу перемещается сила $P=1$.

Линию усилия в стержне рассчитываем

При построении линии влияния методом сечений задаются положением силы $P=1$ последовательно слева, а затем справа от рассеченной панели. Составляют уравнения статического равновесия: сумма моментов всех сил (или сумма проекций всех сил), приложенных по одну сторону от рассеченной панели, из которых выражают зависимость искомого усилия от опорных реакций.

Полученное выражение, к примеру $N_i = \pm k \cdot R_b$, читается в общем виде так: если сила $P=1$ находится слева от рассеченной панели K_{IK} , линия влияния N_i повторяет линию влияния опорной реакции R_b , ординаты которой взяты с тем или иным знаком, увеличены в k раз. Для построения левой ветви линии влияния N_i достаточно на опорной вертикали «В» отложить значение « k », соединить полученную ординату с нулем на опорной вертикали «А». Действительное очертание левой ветви ограничено слева – крайним узлом фермы, а слева – крайним левым узлом рассеченной панели. Аналогично производится построение правой ветви. В пределах рассеченной панели строим переходную (передаточную) линию – она соединяет крайнюю левую точку правой ветви и крайнюю правую точку левой ветви.

При построении линии влияния методом вырезания узла последователь рассматривают условие равновесия узла при двух возможных положениях единичной силы : «сила $P=1$ в узле» и «сила $P=1$ вне узла». Если сила $P=1$ находится вне узла, выражают усилие в искомом стержне через усилие в другом, при этом выражение имеет вид $N_i = \pm k \cdot N_m$, и читается в общем виде так: если сила $P=1$ находится вне узла, линия влияния N_i повторяет линию влияния усилия в стержне N_m , ординаты которой взяты с тем или иным знаком и увеличены в k раз. В соответствии с этим соотношением производится построение линии влияния. Затем рассматривается положение силы $P=1$ в узле, вновь составляется то же уравнение равновесия, при этом получаем выражение

$N_i = \pm k \cdot N_m \pm 1$, и читается в общем виде так: если сила $P=1$ находится в узле, ордината линии влияния N_i равняется ординате линии влияния усилия в стержне N_m , которая взята с тем или иным знаком, увеличена в «k» раз, к полученному результату необходимо прибавить « ± 1 ». Таким образом рассчитывается ордината линии влияния в рассматриваемом узле; при вырезании узла рассеченными обычно оказываются две панели - слева и справа от узла, в пределах рассеченных панелей строим две передаточные линии. Если рассматриваемый узел является крайним, рассеченной оказывается только одна панель, соответственно и передаточная линия только одна.

На основании анализа линий влияния можно сделать выводы о свойствах линий влияния в фермах:

1. Для построения линии влияния в стержне фермы необходимо выявить аналитически закон изменения усилия в стержне фермы и составить уравнения левой и правой ветви линии влияния;
2. Ветви линий влияния всегда пересекаются под моментной точкой;
3. Если моментная точка совпадает с крайней точкой рассечённой панели, то передаточная прямая является продолжением одной из ветвей;
4. Если крайние точки рассечённых панелей верхнего и нижнего поясов фермы не лежат на одних вертикальных прямых, то линии влияния при перемене уровня езды будут отличаться положением передаточной прямой. При перемене уровня езды изменение линии влияния происходит в пределах передаточной прямой;
5. Если граничные точки рассечённых панелей по верхнему и нижнему поясу лежат на одних вертикалях, положение передаточной прямой и линия влияния не меняются.

Определение усилий в стержнях фермы по линиям влияния

С помощью линий влияния можно определять усилия в стержне фермы при любом приложении нагрузки. Для этого используется известная формула:

$$S_i = \pm \sum P_i y_i \pm \sum q_i \omega_i \pm \sum M_i t q \alpha_i$$

где:

S_i – усилие в заданном стержне фермы.

Так как фермы рассчитывают на действие сосредоточенных сил, приложенных в узлах, усилия в стержнях фермы определяется по формуле:

$$S_i = \pm \sum P_i \cdot y_i$$

где $\sum P_i y_i$ - сумма произведений величины приложенной сосредоточенной силы P_i на величину ординаты линии влияния под этой силой - y_i . Ординаты линий влияния y_i определяем из подобия треугольников на линии влияния.

Пример расчета простой плоской статически определимой фермы.

Для фермы с выбранными по шифру из таблицы размерами и нагрузкой требуется:

- а) определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели, включая правую стойку (4 стержня);
- б) построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- в) по линиям влияния подсчитать значения усилий от заданной нагрузки и сравнить их со значениями, полученными аналитически;

Исходные данные:

номер панели

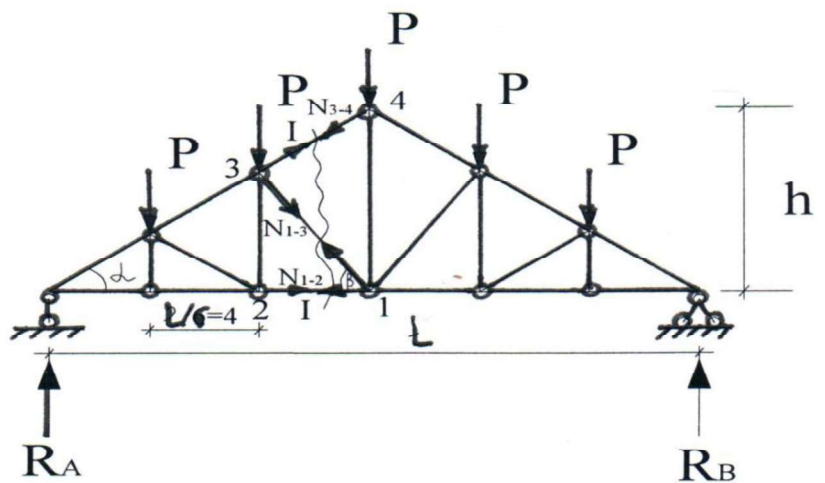
(считая слева) = 3

$L = 24\text{ м}$

$h = 3\text{ м}$

$P = 1,2\text{ кН}$

№ схемы 1



Решение:

1. Определение опорных реакций от действия заданной постоянной нагрузки

а) определяем опорные реакции, для этого составляем уравнения статического равновесия, рассматриваем сумму моментов всех сил, приложенных к ферме, относительно опорных точек:

$$\sum M_A = 0 \quad R_B \cdot \ell - P \cdot \frac{\ell}{6} - P \cdot \frac{2\ell}{6} - P \cdot \frac{3\ell}{6} - P \cdot \frac{4\ell}{6} - P \cdot \frac{5\ell}{6} = 0 \quad R_B = 2,5 \cdot P = 3(\text{кН})$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_A \cdot \ell - P \cdot \frac{\ell}{6} - P \cdot \frac{2\ell}{6} - P \cdot \frac{3\ell}{6} - P \cdot \frac{4\ell}{6} - P \cdot \frac{5\ell}{6} = 0 \quad R_A = 2,5 \cdot P = 3(\text{кН})$$

б) для проверки найденных опорных реакций составим уравнение статического равновесия, а именно – сумма проекций всех сил, приложенных к ферме, на вертикальную ось должна равняться нулю:

$$\sum Y = 0 \quad R_A + R_B - 5P = 0 \quad 3 + 3 - 5 \cdot 1,2 = 0 \quad 6 - 6 = 0$$

2. Определение усилий в стержнях указанной панели:

а) усилие в стержне нижнего пояса N_{1-2} определяем методом сечений. Проведём сечение I-I.

Составляем уравнение суммы моментов всех сил, приложенных слева от сечения относительно моментной точки, в качестве моментной точки рассматриваем точку 3, в которой сходятся оси двух других из трех рассеченных стержней, за исключением рассчитываемого:

$$\sum M_3^{\text{лев}} = 0 \quad N_{1-2} \cdot \frac{2}{3}h + P \cdot \frac{\ell}{6} - R_A \cdot 2 \cdot \frac{\ell}{6} = 0$$
$$N_{1-2} = \frac{2,5 \cdot 8 \cdot 1,2 - 1,2 \cdot 4}{2} = \frac{24 - 4,8}{2} = 9,6 (\text{кН})$$

б) усилие в стержне верхнего пояса N_{3-4} определяем методом сечений. Воспользуемся тем же сечением I-I. Составляем уравнение статического равновесия: сумма моментов всех сил, приложенных слева от сечения относительно моментной точки равна нулю. В качестве моментной точки используем точку 1, в которой сходятся оси двух других из трех рассеченных стержней, за исключением рассчитываемого:

$$\sum M_1^{\text{лев}} = 0 \quad N_{34} \cdot \cos \alpha \cdot h + R_B \cdot 3 \cdot \frac{\ell}{6} - P \cdot \frac{\ell}{6} - P \cdot 2 \cdot \frac{\ell}{6} = 0$$
$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot \frac{\ell}{6}}{\sqrt{h^2 + (\frac{\ell}{2})^2}} = \frac{12}{\sqrt{9 + 144}} = \frac{12}{12,369} = 0,97;$$
$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (\frac{\ell}{2})^2}} = \frac{2}{12,369} = 0,162$$

$$N_{34} = \frac{1,2 \cdot 4 + 1,2 \cdot 8 - 3 \cdot 12}{3 \cdot 0,97} = 7,423 (\text{кН})$$

в) усилие в раскосе N_{1-3} определяем методом сечений (сечение I-I).

Составляем уравнение статического равновесия: сумма моментов всех сил, приложенных слева от сечения относительно моментной точки А, равна нулю:

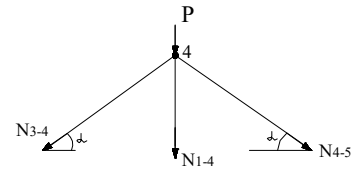
$$\sum M_A^{\text{лев}} = 0 \quad (N_{13} \cdot \sin \beta \cdot 3 + P \cdot 2) \cdot \frac{\ell}{6} + P \cdot \frac{\ell}{6} = 0$$
$$\sin \beta = \frac{\frac{2}{3}h}{\sqrt{(\frac{2}{3}h)^2 + (\frac{\ell}{6})^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,447$$
$$N_{13} = \frac{-P \cdot \frac{\ell}{6} - P \cdot 2 \cdot \frac{\ell}{6}}{3 \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \sin \beta} = \frac{-3P \cdot \frac{\ell}{6}}{3 \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \sin \beta} = -\frac{1,2}{0,447} = -2,68$$

г) усилие в стойке N_{1-4} определяем методом вырезания узлов. Составляем уравнение статического равновесия – сумма проекций всех сил, приложенных к узлу 4 на вертикальную ось должна равняться нулю:

$$\sum Y = 0 \quad -N_{34} \cdot \sin \alpha - N_{1-4} - N_{45} \cdot \sin \alpha - P = 0$$

$$\sum X = 0 \quad -N_{34} \cdot \cos \alpha + N_{45} \cdot \cos \alpha = 0 \quad N_{34} = N_{45};$$

$$N_{14} = -(2N_{34} \cdot \sin \alpha + P) = -2 \cdot (-7,432) \cdot 0,162 = 2,400 - 1,2 = 1,2(\kappa H)$$



3. Построение линий влияния в стержнях фермы.

Линия влияния - это графическое изображение закона изменения какого либо усилия в заданном сечении при движении по сооружению силы $P=1$.

Что бы графически изобразить закон изменения усилия, сначала выявляем этот закон аналитически, при этом используем те же методы и способы, что и при аналитическом расчёте усилий в стержнях ферм на действие постоянной нагрузки.

а) линию линия усилия в стержне нижнего пояса N_{1-2} рассчитываем методом сечений. Составляем уравнение статического равновесия: сумма моментов всех сил, приложенных по одну сторону от сечения относительно моментной точки должна быть равна нулю. В качестве моментной точки используем точку 3, в которой сходятся оси двух других из трех рассеченных стержней, за исключением того стержня, усилие в котором определяется.

Если сила $P=1$ находится слева от рассеченной панели:

$$\sum M_3^{прав} = 0; \quad R_B \cdot 4 \frac{\ell}{6} - N_{1-2} \cdot \frac{2}{3} h = 0$$

$$N_{1-2} = R_B \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 8R_B$$

т.е. левая ветвь линии влияния повторяет линию влияния опорной реакции R_B , все ординаты которой увеличены в 8 раз.

Если сила $P=1$ находится справа от рассеченной панели

$$\sum M_3^{лев} = 0; \quad R_A \cdot 2 \frac{\ell}{6} - N_{1-2} \cdot \frac{2}{3} h = 0$$

$$N_{1-2} = R_A \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} = 4R_A$$

т.е. правая ветвь линии влияния повторяет линию влияния опорной реакции R_A , все ординаты которой увеличены в 4 раза.

В пределах рассеченной панели строим передаточную линию.

б) линию влияния усилия в стержне верхнего пояса N_{3-4} рассчитываем методом сечений. Составляем уравнение статического равновесия: сумма моментов всех сил, приложенных по одну сторону от рассеченной панели, относительно моментной точки должна быть равна нулю. В качестве моментной точки используем точку 1, в которой сходятся оси двух других из трех рассеченных стержней, за исключением рассчитываемого.

Если сила $P=1$ находится слева от рассеченной панели

$$\sum M_1^{npas} = 0; \quad N_{34} \cdot h \cdot \cos \alpha + R_B \cdot 3 \frac{\ell}{6} = 0$$

$$N_{34} = -R_B \cdot \frac{\frac{\ell}{2}}{h \cdot \cos \alpha} = -R_B \cdot \frac{12}{3 \cdot 0,97} = -4,123 R_B$$

т.е. левая ветвь линии влияния повторяет линию влияния опорной реакции R_B , все ординаты которой взяты с обратным знаком и увеличены в 4,474 раза.

Если сила $P=1$ находится справа от рассеченной панели

$$\sum M_1^{лев} = 0 \quad N_{34} \cdot h \cdot \cos \alpha + R_A \cdot 3 \frac{\ell}{6} = 0$$

$$N_{34} = -R_A \cdot \frac{\frac{\ell}{2}}{h \cdot \cos \alpha} = -R_A \cdot \frac{12}{3 \cdot 0,97} = -4,123 R_A$$

т.е. правая ветвь линии влияния повторяет линию влияния опорной реакции R_A , все ординаты которой взяты с обратным знаком и увеличены в 4,123 раза.

В пределах рассеченной панели строим передаточную линию.

в) линию влияния усилия в стержне раскоса N_{1-3} рассчитываем методом сечений. Составляем уравнение статического равновесия: сумма моментов всех сил, приложенных по одну сторону от рассеченной панели, относительно моментной точки равна нулю. В качестве моментной точки используем точку А, в которой сходятся оси двух других из трех рассеченных стержней, за исключением рассчитываемого.

Если сила $P=1$ находится слева от рассеченной панели

$$\sum M_A^{npas} = 0 \quad N_{13} \cdot 3 \frac{\ell}{6} \cdot \sin \beta + R_B \cdot \ell = 0$$

$$N_{13} = -R_B \frac{2\ell}{\ell \sin \beta} = -R_B \frac{2}{0,447} = -4,474 R_B$$

т.е. левая ветвь линии влияния повторяет линию влияния опорной реакции R_B , все ординаты которой взяты с обратным знаком и увеличены в 4,474 раза.

Если сила $P=1$ находится справа от рассеченной панели

$$\sum M_A^{лев} = 0 \quad N_{1-3} \cdot 3 \frac{\ell}{6} \sin \beta = 0 \quad N_{13} = 0$$

таким образом, правая ветвь линии влияния нулевая.

В пределах рассеченной панели строим передаточную линию.

г) линию влияния усилия в стойке N_{1-4} рассчитываем методом вырезания узлов. Составляем уравнение статического равновесия – сумма проекций всех сил, приложенных к узлу 4 на вертикальную ось должна равняться нулю, так как узел 4 принадлежит верхнему поясу, и сила $P=1$ перемещается по верхнему поясу, то если сила $P=1$ находится вне узла 4:

$$\sum Y = 0 \quad -N_{14} - 2N_{34} \cdot \sin \alpha = 0 \quad N_{14} = -2N_{34} \cdot 0,162 = -0,324N_{34}$$

т.е. если сила $P=1$ находится вне узла 4, линия влияния усилия в стержне 1-4 повторяет линию влияния усилия в стержне 3-4, все ординаты которой взяты с обратным знаком и увеличены в 0,324 раза.

если сила $P=1$ находится в узле 4 :

Составляем уравнение статического равновесия – сумма проекций всех сил, приложенных к узлу 4 на вертикальную ось должна равняться нулю

$$\sum Y = 0 \quad -N_{14} - 2N_{34} \cdot \sin \alpha - P = 0$$

$$N_{14} = -0,324 \cdot N_{34} - P = -(-2,062) \cdot 0,324 - 1 = -0,332$$

т.о. если сила $P=1$ находится в узле 4, ордината линия влияния усилия в стержне 1-4 равняется ординате линии влияния усилия в стержне 3-4, все ординаты которой взяты с обратным знаком и увеличены в 0,324 раза, от полученного результата отнимаем единицу. Полученную ординату «=0,332» откладываем на линии влияния под узлом 4.

4. Определение значения усилий от постоянной нагрузки по линиям влияния.

Для определения усилий в заданных стержнях фермы по линиям влияния воспользуемся выражением

$$N_i = \sum P_i \cdot y_i$$

где N_i –усилие в рассматриваемом стержне, P_i – приложенная заданная сосредоточенная сила, y_i - ордината линии влияния, расположенная под точкой приложения силы P_i . Ординаты линий влияния определяем из подобия треугольников, используя в качестве отправных характерные (базовые) ординаты линий влияния:

$$N_{1-2} = 1,2 \cdot (1,333 + 2,667 + 2 + 1,334 + 0,667) = 9,6 \text{ (кН)}$$

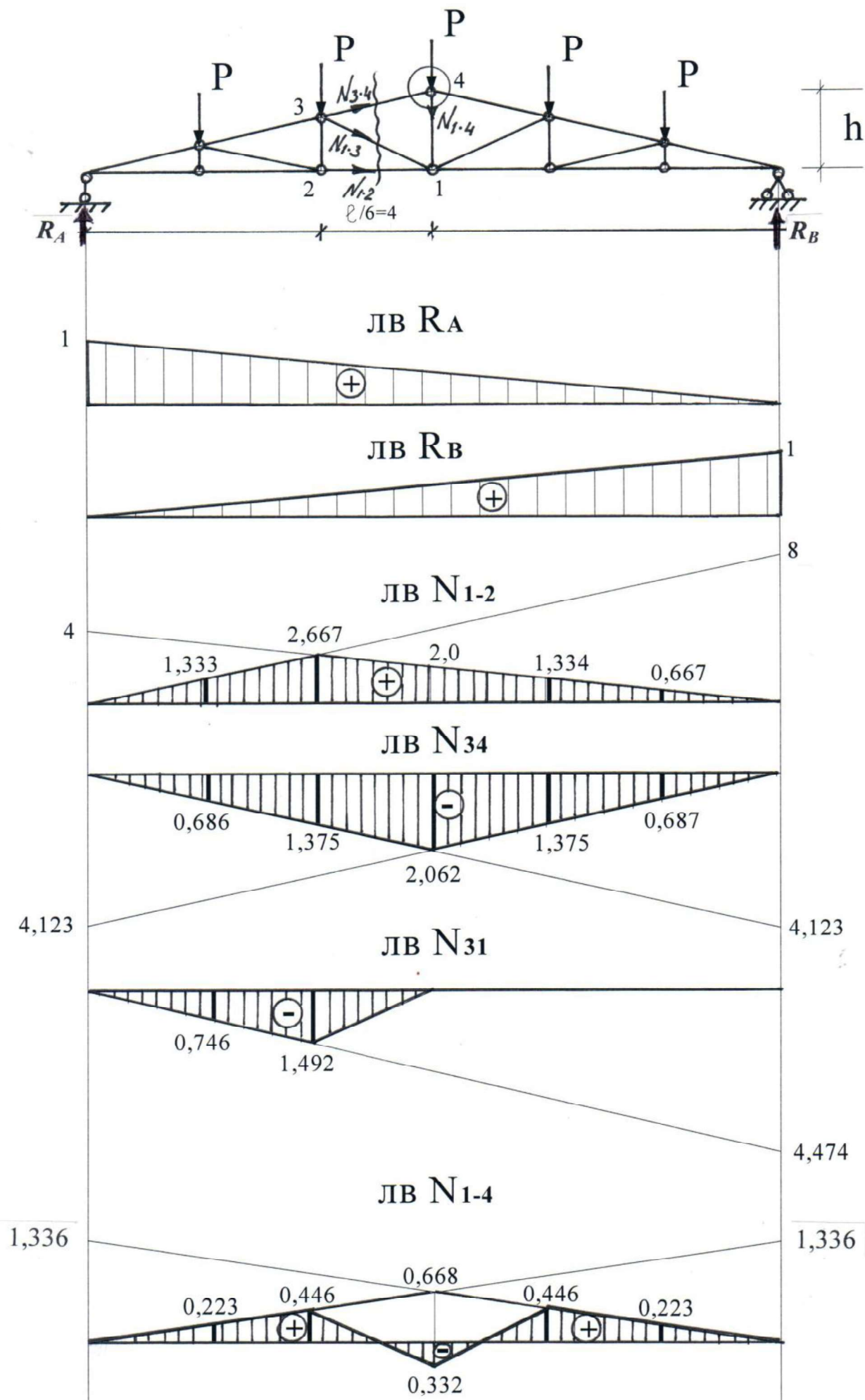
$$N_{34} = 1,2 \cdot (-0,686 - 1,375 - 2,062 - 1,375 - 0,686) = -7,4208 \text{ (кН)}$$

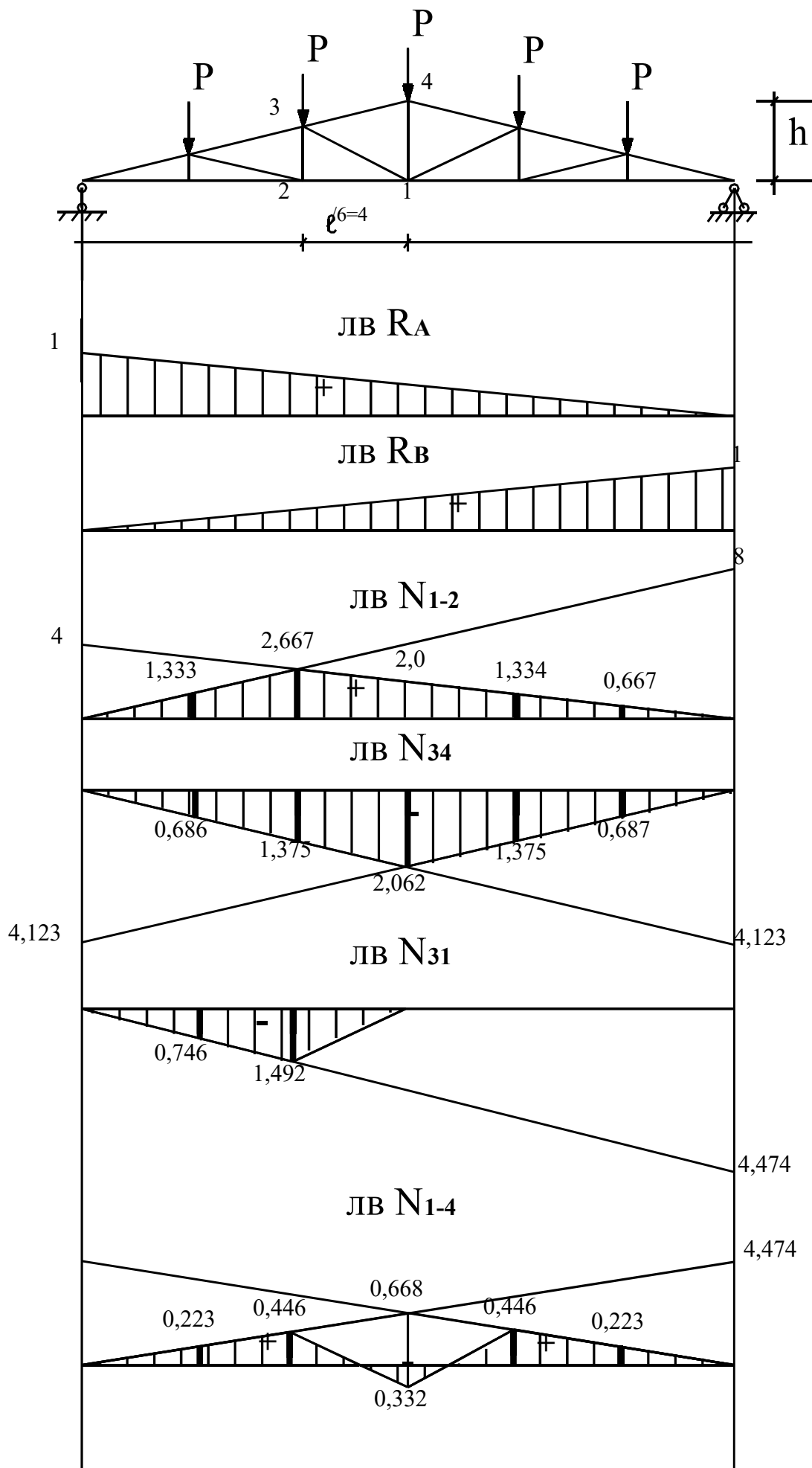
$$N_{31} = 1,2 \cdot (-0,746 - 1,492) = -2,686 \text{ (кН)}$$

$$N_{14} = 1,2 \cdot (0,223 + 0,446 - 0,332 + 0,446 + 0,223) = 1,207 \text{ (кН)}$$

5. Сопоставим результаты расчета усилий в стержнях фермы

Усилие в стержне	Результат аналитического расчета	Результат расчета по линии влияния	Расхождение результатов, %
N_{1-2}	9,6	9,6	0
N_{3-4}	-7,423	-7,4208	0,03
N_{3-1}	-2,68	-2,686	0,22
N_{1-4}	1,2	1,207	0,6





Вопросы к самопроверке по теме: «Расчет статически определимых ферм».

1. Что называется простой статически определимой фермой?
2. Как принято называть отдельные элементы фермы ?
3. Как классифицируются фермы по особенностям очертания поясов?
4. Как классифицируются фермы по особенностям строения решетки?
5. Условия геометрической неизменяемости ферм. Достоинства и недостатки фермы в сравнении с другими расчетными схемами.
6. Какие упрощения, положенные в основу расчета статически определимых ферм.
7. На какой вид деформации работают стержни в фермах? Какие внутренние усилия возникают в стержнях ферм под действием приложенной нагрузки?
8. Какие аналитические методы и способы применяются при расчете ферм?
9. В чем состоит метод круговых сечений (Метод вырезания узлов) для определения усилий в стержнях ферм. Как составляются уравнения статического равновесия?
10. Сформулируйте основные признаки нулевых стержней
11. В чем состоит метод сквозных сечений (Метод сечений) для определения усилий в стержнях ферм. Как составляются уравнения статического равновесия? В каком случае для определения усилия методом сечений используется способ проекций?
12. В каком случае для определения усилия методом сечений используется способ моментной точки?
13. Как определяется положение моментной точки?
14. Что называется линией влияния усилия в стержне фермы?
15. Как производится построение линий влияния опорных реакций в простой двухопорной ферме?
16. Какие методы и способы используются при аналитическом выявлении закона изменения усилия в заданном стержне фермы?
17. Что представляет собой левая ветвь линии влияния усилия в заданном стержне фермы? Правая ветвь? Передаточная (переходная) линия?
18. Как производится расчет линии влияния методом сечений и способом проекций?
19. Как производится расчет линии влияния методом сечений и способом моментной точки??
20. Как производится расчет линии влияния методом вырезания узлов?
21. В каком случае при перемене уровня езды происходит изменение в очертании линии влияния?
22. Как производится расчет усилий в стержнях ферм по линиям влияния от действия заданной постоянной нагрузки?

Задача 4.

Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил.

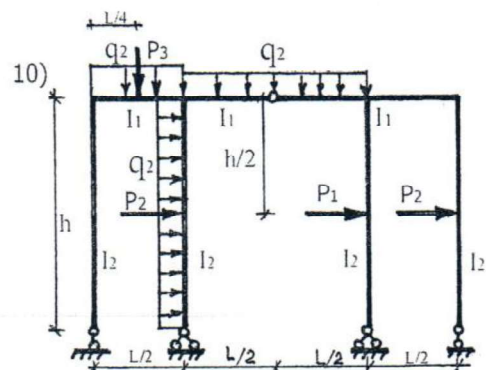
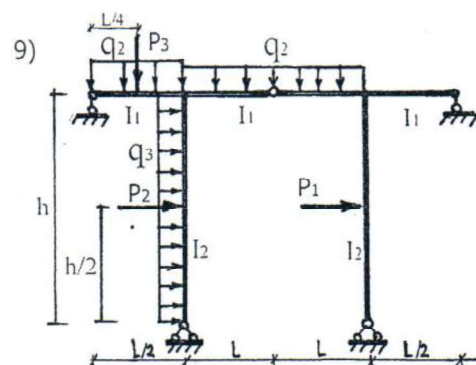
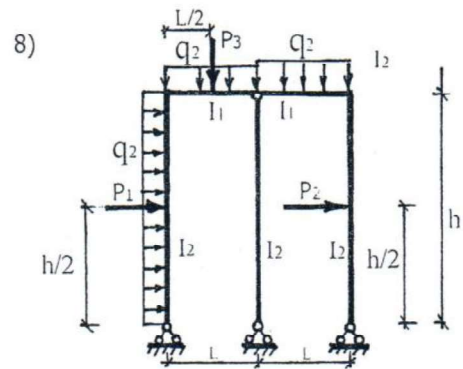
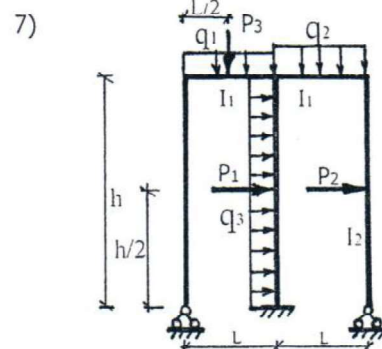
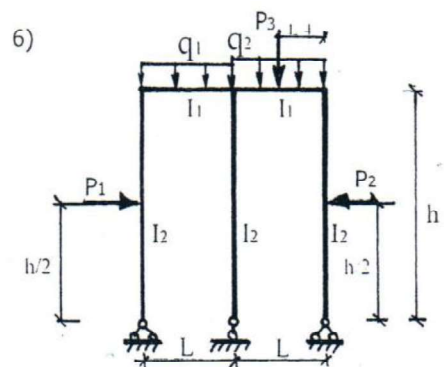
Для рамы с выбранными по шифру размерами и нагрузкой требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- 2) проверить правильность построенных эпюр.

Таблица 1

Исходные данные

Первая цифра шифра	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	l , м	Вторая цифра шифра	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	q_3 , кН/м	h , м	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$I_1:I_2$
1	4	0	0	8	1	0	2	0	10	1	1:2
2	0	5	0	12	2	0	0	2	8	2	2:3
3	0	0	6	9	3	0	0	4	6	3	1:3
4	5	0	0	10	4	4	0	0	9	4	1:3
5	0	6	0	7	5	0	2	0	4	5	2:3
6	0	0	4	6	6	0	0	1	5	6	1:3
7	6	0	0	5	7	2	0	0	7	7	2:1
8	0	4	0	11	8	0	1	0	11	8	3:2
9	0	0	5	4	9	0	4	0	12	9	3:4
0	4	0	0	13	0	1	0	0	13	0	1:2



Схемы к задаче №4

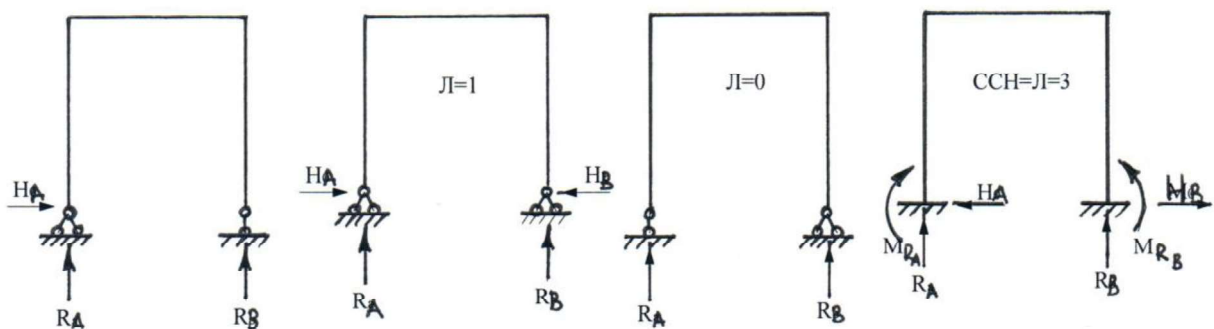
Статически неопределимые системы. Расчет статически неопределимых систем методом сил.

Статически неопределимой называется система, усилия в которой невозможно определить, пользуясь уравнениями статики, т.к. она содержит лишние связи ($\mathcal{L}$).

Лишними называются такие связи, при удалении которых статически неопределимая система преобразуется в статически определимую и остается при этом геометрически неизменяемой.

Число лишних связей системы принято называть степенью статической неопределимости этой системы:

$$CCH = n = \mathcal{L}$$



Степень статической неопределимости для ферм определяется по формуле:

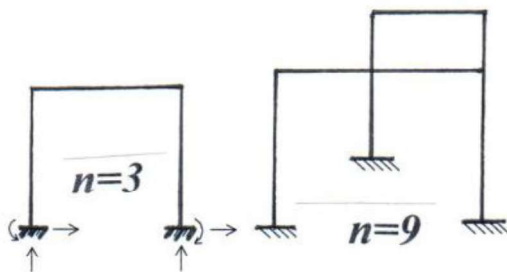
$$n = \mathcal{L} = C + C_0 - 2U,$$

где: C – количество стержней фермы,

C_0 – количество опорных связей,

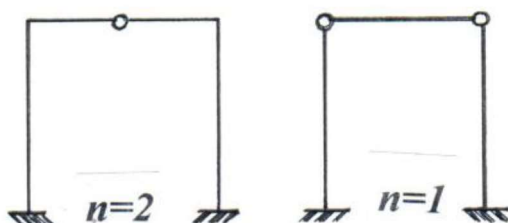
U – количество узлов.

Степень статической неопределимости для рам определяется на основе рассмотрения жесткого контура:



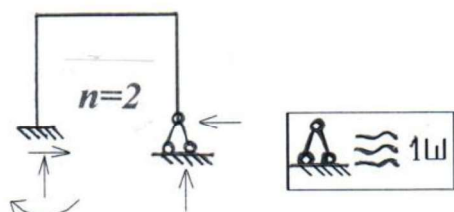
Замкнутый жесткий контур трижды статически неопределим

$$n = 3K$$

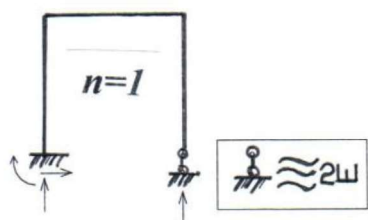


Введение шарнира позволяет составить дополнительное уравнение равенства нулю изгибающего момента в шарнире и тем самым уменьшает степень статической неопределимости на 1,

$$n = 3K - III$$



Замена заделки шарнирно неподвижной опорой уменьшает степень статической неопределимости на 1, т.е. эквивалентна постановке одного шарнира.



Замена заделки шарнирно подвижной опорой уменьшает степень статической неопределимости на 2, т.е. эквивалентна постановке двух шарниров

Считая все контуры условно жесткими, определяем степень статической неопределимости и число лишних связей по формуле:

$$n = \text{л} = 3K - \text{Ш} \quad (1)$$

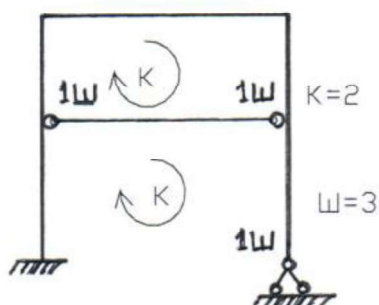
где: K - количество замкнутых контуров,
 Ш - количество простых шарниров.

Для определения числа контуров K объединим все опорные точки рамы линией «земли» и тогда четко определяются замкнутые контуры, образованные линией «земли», стержнями рамы и опорными узлами.

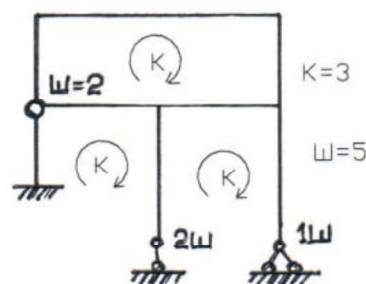
При определении Ш - количества простых шарниров следует помнить, что простым шарниром называется шарнир, соединяющий два стержня. Сложный шарнир, соединяющий C стержней, считается соответствующим кратным количеству простых шарниров по формуле $\text{Ш} = C - 1$.

При использовании формулы (1) шарнирно неподвижные опоры считаются за один шарнир, а шарнирно подвижные опоры считаются за два шарнира каждая.

Шарнир, соединяющий два стержня – простой. Простым считается в частности, шарнир, прикрепляющий затяжку к стойке. Шарнир, соединяющий более двух стержней, называется сложным или кратным. Число простых шарниров в сложном определяется как $\text{Ш} = C - 1$, где C - число соединяемых в шарнире стержней:



$$n = \text{л} = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 2 - 3 = 3$$



$$n = \text{л} = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 3 - 5 = 4$$

Для расчета неопределимых систем разработаны точные методы (метод сил, метод перемещений, комбинированный метод, смешанный метод) и ряд приближенных методов.

Основные положения метода сил.

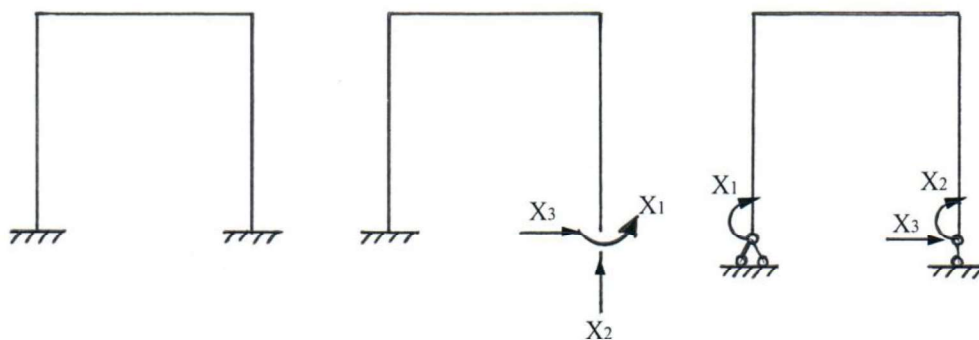
1. При расчете статически неопределимой системы методом сил заданную систему заменяют основной системой.

Основная система метода сил (ОСМС) - статически определимая, геометрически неизменяемая система, полученная из заданной путем отбрасывания лишних связей.

Действие отброшенных связей заменяется действием неизвестных сил (отсюда название метода – метод сил).

Существует несколько вариантов образования основной системы метода сил

1 ВАРИАНТ - основная система может быть получена отбрасыванием лишних внешних связей. При отбрасывании связей в жесткой заделке первой всегда отбрасывается связь, препятствующая углу поворота, действие этой отброшенной связи заменяется неизвестным моментом:



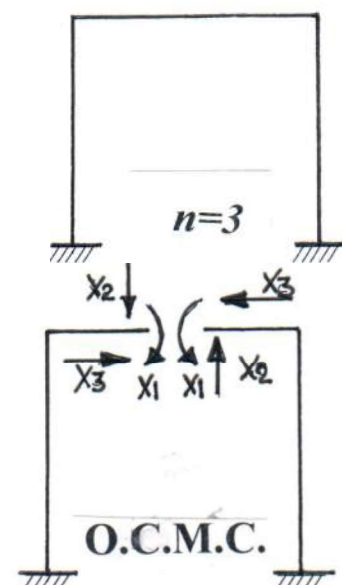
2 ВАРИАНТ - основная система может быть получена отбрасыванием лишних внутренних связей:

а) рассечением по стержню, при этом отбрасываются 3 связи, препятствующие:

1) взаимному углу поворота (заменяются двумя моментами, направленными в противоположные стороны),

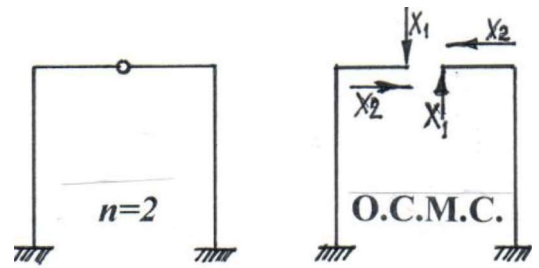
2) взаимному горизонтальному перемещению (заменяются двумя горизонтальными силами, направленными в противоположные стороны),

3) взаимному вертикальному перемещению (заменяются двумя вертикальными силами, направленными в противоположные стороны).

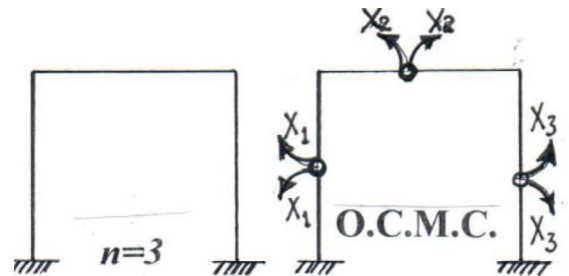


б) расчленением по шарниру: при этом отбрасываются 2 связи препятствующие:

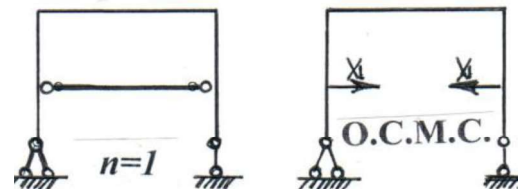
- 1) взаимному горизонтальному перемещению
- 2) взаимному вертикальному перемещению



в) введением дополнительных шарниров, при этом отбрасываются связи препятствующие взаимному углу поворота (заменяются двумя моментами, направленными в противоположные стороны).



г) отбрасыванием затяжки: при этом отбрасывается одна связь, препятствующая горизонтальному перемещению точек закрепления затяжки (заменяется двумя горизонтальными силами, направленными в противоположные стороны).



3 ВАРИАНТ - основная система может быть получена комбинацией приемов 1 и 2 вариантов:

2. Условия соответствия основной системы метода сил и заданной системы записываются в виде канонических уравнений метода сил (КУМС)

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Каждое из уравнений выражает условие равенства нулю перемещения по направлению отброшенной связи от действия всех сил, приложенных к системе.

В каноническом уравнении коэффициент при неизвестной силе δ_{ik} - есть перемещение по направлению i -той отброшенной связи от действия силы $X_k=1$, свободный член канонического уравнения Δ_{ip} - перемещение по направлению i -той отброшенной связи от действия приложенной внешней нагрузки.

Для определения коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений метода сил используются известные из курса сопротивления материалов зависимости: интеграл Максвелла-Мора и правило Верещагина для определения численного значения интеграла Масвелла-Мора.

Для раскрытия статической неопределимости достаточно выполнить решение системы канонических уравнений относительно неизвестных сил $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$

4. После определения значений неизвестных сил $X_1, X_2, \dots X_k$ строится эпюра изгибающих моментов согласно выражению:

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_R \cdot X_K + \dots + M_P$$

т.е. путем суммирования единичных эпюр, каждая из которых умножена на соответствующее значение силы X , и грузовой эпюры моментов.

Построенную эпюру моментов проверяют деформационной (кинематической) проверкой.

5. По эпюре изгибающих моментов строится эпюра поперечных сил Q .

6. По эпюре поперечных сил Q строится эпюра продольных сил N .

7. Статическая проверка равновесия рамы завершает расчет.

Проверяется выполнение условий статического равновесия:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0$$

Анализируя результаты расчета статически неопределимой рамы методом сил можно сделать некоторые выводы о достоинствах и недостатках статически неопределимых систем.

К достоинствам статически неопределимых систем относятся:

1. *Экономичность* – уменьшение внутренних усилий позволяет уменьшить расход материала, сделать конструкцию более легкой и дешевой.

2. *Повышенная жесткость* – за счет лишних связей уменьшаются перемещения в системе, что приводит к увеличению жесткости.

3. *Повышенная надежность* – выход из строя лишней связи не приводит к разрушению конструкции.

К недостаткам статически неопределимых систем относятся следующие их свойства:

1. Внутренние усилия в системе зависят от жесткости отдельных элементов.

2. Статически неопределимая система чувствительна к воздействию температуры и осадки опор. В системе возникают усилия от действия неравномерного нагрева и осадки опор.

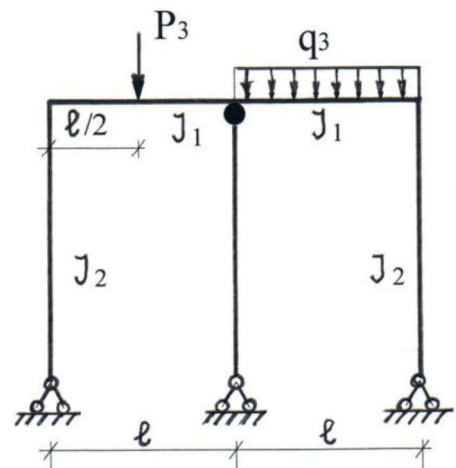
Пример расчета плоской статически неопределимой рамы методом сил.

Для рамы с выбранными по шифру размерами и нагрузкой требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- 2) проверить правильность построенных эпюр.

Исходные данные:

$P_1 = 0 \text{ кН}$	$q_1 = 0 \text{ кН/м}$	схема №8
$P_2 = 0 \text{ кН}$	$q_2 = 0 \text{ кН/м}$	$J_1 / J_2 = \frac{3}{2}$
$P_3 = 6 \text{ кН}$	$q_3 = 1 \text{ кН/м}$	
$L = 9 \text{ м}$	$h = 5 \text{ м}$	



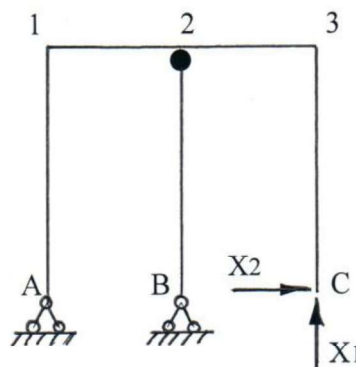
Решение:

1. Установим степень статической неопределимости по формуле

$$n = 3k - ш$$

где: k – число контуров, $ш$ – число шарниров.

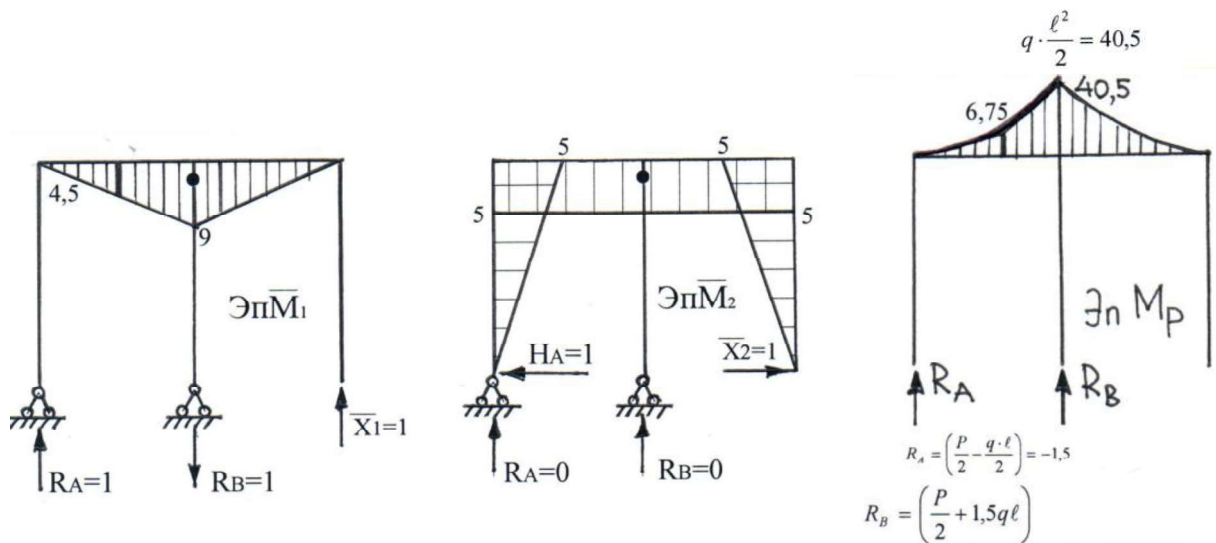
Выберем основную систему, используя свойства симметрии:



2. Канонические уравнения метода сил имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Построим единичные и грузовую эпюры моментов. Для построения эпюры моментов первого единичного состояния «Эп. $\bar{M}_1$ » в основной системе метода сил приложим силу $\bar{x}_1 = 1$ определим опорные реакции и построим эпюру изгибающих моментов. Для построения эпюры моментов второго единичного состояния «Эп. $\bar{M}_2$ » в основной системе метода сил приложим силу $\bar{x}_2 = 1$ определим опорные реакции и построим эпюру изгибающих моментов. Для построения эпюры моментов грузового состояния «Эп. M_P » в основной системе метода сил приложим заданную нагрузку определим опорные реакции и построим эпюру изгибающих моментов:



4. Определим все коэффициенты и свободные члены расчетных (канонических) уравнений:

Для определения перемещения по направлению первой отброшенной связи от действия силы $\bar{x}_1 = 1$ $\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EJ} \cdot ds$, необходимо рассмотреть первое единичное состояние, построить эпюру моментов первого единичного состояния $\bar{M}_1$, полученную эпюру перемножить с эпюрой моментов первого единичного состояния $\bar{M}_1$.

Для определения δ_{11} необходимо:

а) рассмотреть первое единичное состояние для этого в О.С.М.С. приложить $\bar{x}_1 = 1$

б) построить эпюру моментов от действия $x_1 = 1$

в) перемножить эпюру M_1 саму на себя по правилу Верещагина;

Напомним правила перемножения эпюр по Верещагину: чтобы перемножить две эпюры достаточно:

--- выделить на одной эпюре элементарный участок, то есть такой участок, для которого определяется положение центра тяжести, в

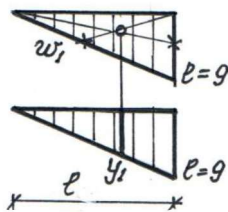
случае, если этот участок - трапеция, целесообразно рассматривать его как две составляющие: прямоугольник и треугольник (или два треугольника);

--- определить для выбранного элементарного участка значение площади w_i и положение центра тяжести в этой площади;

--- снять на второй эпюре ординату под центром тяжести первой - y_i ;

--- подставить найденные параметры в формулу (2).

Чтобы нагляднее пояснить суть происходящего, изобразим две эпюры M_1 и M_1 на левой полураме



определим элементарную площадь $w_i = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l$;

(площадь треугольника).

Определяем положение центра тяжести в треугольнике и значение ординаты эпюры моментов, соответствующей центру тяжести

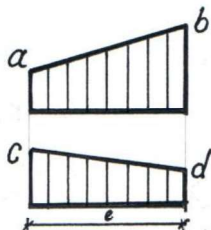
(находящейся под центром тяжести) $y_1 = \frac{2}{3} \cdot l$ (значение ординаты

определяется из подобия треугольников). так как эпюра M_1 симметрична, то результат перемножения на левой полураме будет таким же, как и на правой поэтому, для определения перемещения достаточно удвоить результат перемножения эпюр по правой полураме:

$$\delta_{11} = ((w_1 \cdot y_1 + w_2 \cdot y_2) \cdot \frac{1}{EJ_1}) = 2 \cdot ((w_1 \cdot y_1) \cdot \frac{1}{EJ_1}) =$$

Перемножение эпюр можно производить и с помощью таблиц, в которых содержатся результаты перемножения часто встречающихся фрагментов эпюр.

Не приводим содержание таблицы в целом, покажем лишь результат перемножения двух трапеций:



$$\Delta = \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc) \quad (3)$$

Это выражение (3) можно смело назвать универсальным, так как оно позволяет перемножать любые линейные эпюры (треугольники, прямоугольники, «перекрученные» трапеции)

Все последующие расчеты мы в рассматриваемом примере будем выполнять, используя формулу (3).

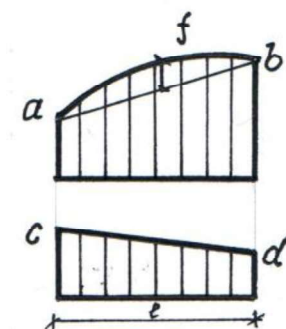
Для определения перемещения по направлению первой отброшенной связи от действия силы $x_2 = 1$ $\delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_2}{EJ} \cdot ds$, необходимо рассмотреть второе единичное состояние, построить эпюру моментов второго единичного состояния M_2 , полученную эпюру перемножить с эпюрой моментов первого единичного состояния M_1 .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EJ} ds = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{9^3}{3} \cdot 2 = 162 \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 2 = 135 \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{5^3}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3EJ} \cdot 5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 2 = (41,667 + 150) \frac{1}{EJ} = 191,67 \frac{1}{EJ}$$

Для определения перемещения по направлению каждой отброшенной связи от действия приложенной нагрузки, необходимо перемножить эпюру моментов соответствующего единичного состояния с эпюрой моментов грузового состояния. При перемножении эпюр (если эпюры линейны) используется формула (3), если одна из эпюр имеет криволинейное очертание, при перемножении таких эпюр используется выражение (4):



$$\Delta = \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc + 2fc + 2fd) \quad (4)$$

где f – высота параболического сегмента, которая

$$\text{определяется как } f = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_P}{EJ} ds &= \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{4,5}{6} \cdot 2 \cdot 4,5 \cdot (-6,75) - \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{4,5}{6} (2 \cdot 4,5 \cdot 6,75 + 2 \cdot 9 \cdot 40,5 + 4,5 \cdot 40,5 + 9 \cdot 6,75) - \\ &- \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{9,0}{6} \left(2 \cdot 9 \cdot 40,5 - 2 \cdot \frac{1 \cdot 81}{8} \cdot 9 \right) = -15,1875 - 258,1885 - 273,375 = -546,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_P}{EJ} ds &= \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6,75) \cdot 4,5 \cdot 5 + \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{4,5}{2} (-6,75 - 40,5) \cdot 5 + \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{3} (-40,5) \cdot 9 \cdot 5 = \\ &= -25,3125 \frac{1}{EJ} - 177,1875 \frac{1}{EJ} - 202,5 \frac{1}{EJ} = -404,991 \end{aligned}$$

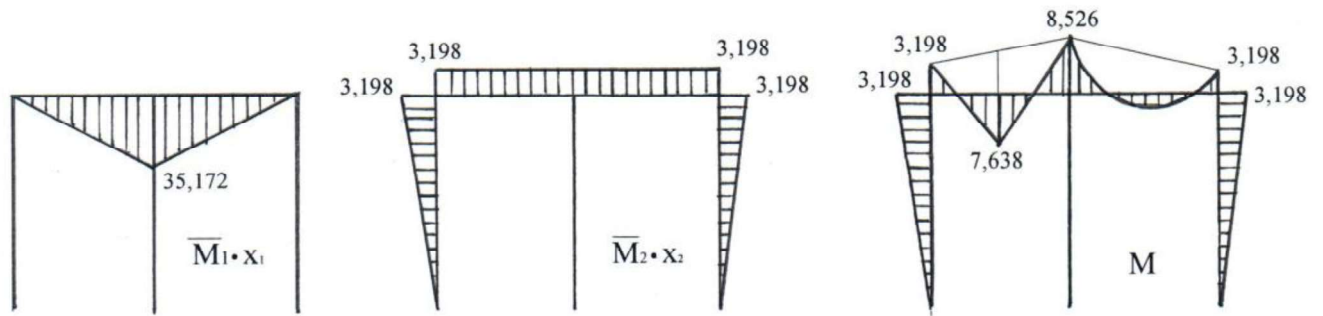
4. Решаем расчетные уравнения:

$$\begin{cases} 162x_1 + 135x_2 - 546,75 = 0 \\ 135x_1 + 191,67x_2 - 404,991 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 162x_1 + 135x_2 - 546,75 = 0 \\ 162x_1 + 230,0x_2 - 485,989 = 0 \end{cases}$$

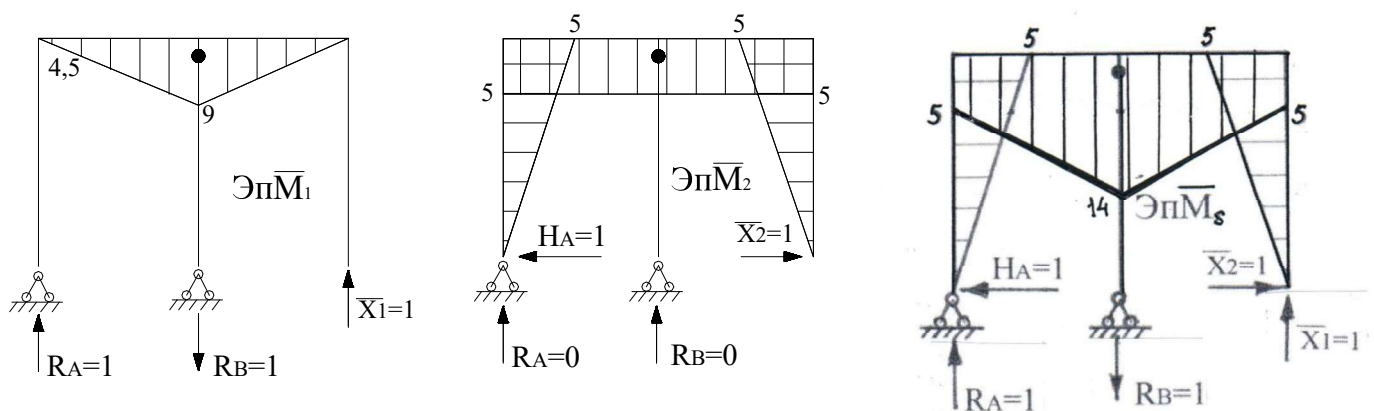
$$(230 - 135)x_2 = 485,989 - 546,75$$

$$95x_2 = -60,761 \quad x_2 = -0,6395 \quad x_1 = 3,908$$

5. Построим расчетную эпюру изгибающих моментов, для этого умножим каждую единичную эпюру моментов на соответствующее значение найденной силы и полученные эпюры просуммируем с эпюрой грузовых моментов:



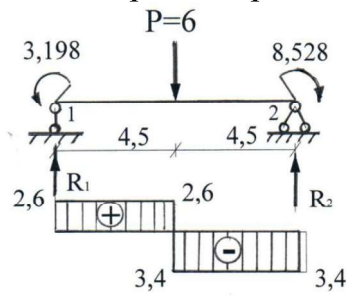
6. Выполним кинематическую проверку полученной эпюры моментов, для этого «перемножим» полученную эпюру и суммарную единичную эпюру по правилу Верещагина, разница между положительными и отрицательными слагаемыми, отнесенная к большему из них, не должна превышать 2%:



$$\Delta = \sum \int \frac{M_s \cdot M}{EJ} ds = \frac{9}{6} \cdot \frac{1}{3EJ} 2(-8,526) \cdot 14 + 2(-3,198) \cdot (-8,526) \cdot 5 + (-3,198) \cdot 14 + 2 \frac{1-9^2}{8} \cdot 14 + 2 \cdot \frac{1 \cdot 9^2}{8} \cdot 5 - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{5}{6} (2 \cdot 3,198 \cdot 5) - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot 3,198 \cdot 5 + \frac{4,5}{6} \cdot \frac{1}{3EJ} (2 \cdot 7,638 \cdot 9,5 - 2 \cdot 3,198 \cdot 5 + 7,638 \cdot 5 + 3,198 \cdot 9,5) + \frac{4}{5} \frac{1}{3EJ} (2 \cdot 7,638 \cdot 9,5 - 2 \cdot 8,526 \cdot 14 - 8,526 \cdot 9,5 + 7,638 \cdot 14) = 4,61 < 3\%$$

7. Построим расчетную эпюру поперечных сил по эпюре моментов: для этого представим каждый стержень рамы как простую двухопорную балку, на которую переносим приложенную к этому стержню рамы нагрузку, а также опорные моменты, величину и направление которых снимаем с эпюры моментов. От действия приложенной нагрузки и опорных моментов определяем опорные реакции и строим эпюры поперечных сил, которые затем переносим на ось рамы.

Рассмотрим стержень 1-2:



$$\sum M_2 = 0$$

$$R_1 \cdot 9 - P \cdot 4,5 - 3,198 + 8,528 = 0$$

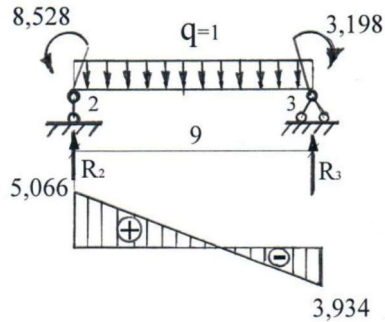
$$R_1 = 2,6$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$R_2 \cdot 9 - P \cdot 4,5 - 8,528 + 3,198 = 0$$

$$R_2 = \frac{6 \cdot 4,5 + 8,528 - 3,198}{9} = 3,4$$

Рассмотрим стержень 2-3



$$\sum M_3 = 0$$

$$R_2 \cdot 9 - 1 \cdot \frac{9^2}{2} - 8,528 + 3,198 = 0$$

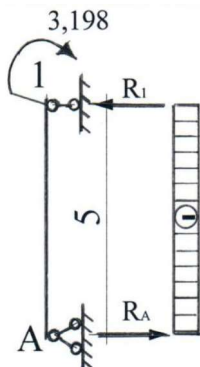
$$R_2 = 5,066$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$R_3 \cdot 9 - 1 \cdot \frac{9^2}{2} - 3,198 + 8,528 = 0$$

$$R_3 = 3,934$$

Рассмотрим стержень А-1



$$\sum M_A = 0$$

$$R_1 \cdot 5 - 3,198 = 0$$

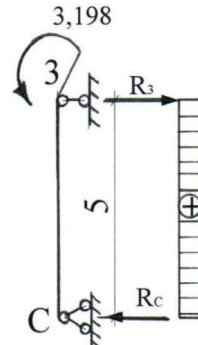
$$R_1 = \frac{3,198}{5} = 0,656$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$R_A \cdot 5 - 3,198 = 0$$

$$R_A = \frac{3,198}{5} = 0,656$$

Рассмотрим стержень С-3



$$\sum M_3 = 0$$

$$R_C \cdot 5 - 3,198 = 0$$

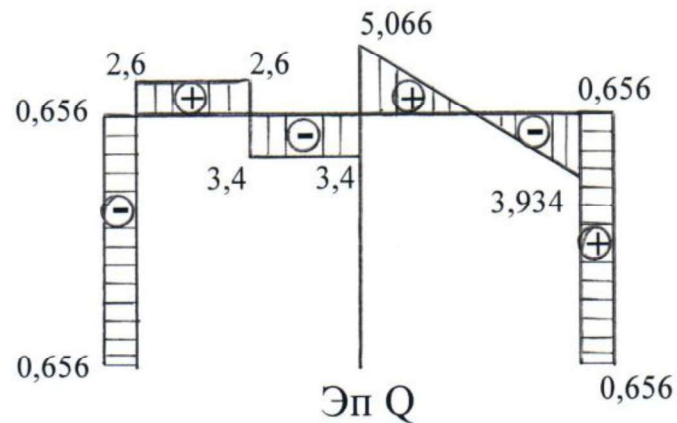
$$R_C = \frac{3,198}{5} = 0,656$$

$$\sum M_C = 0$$

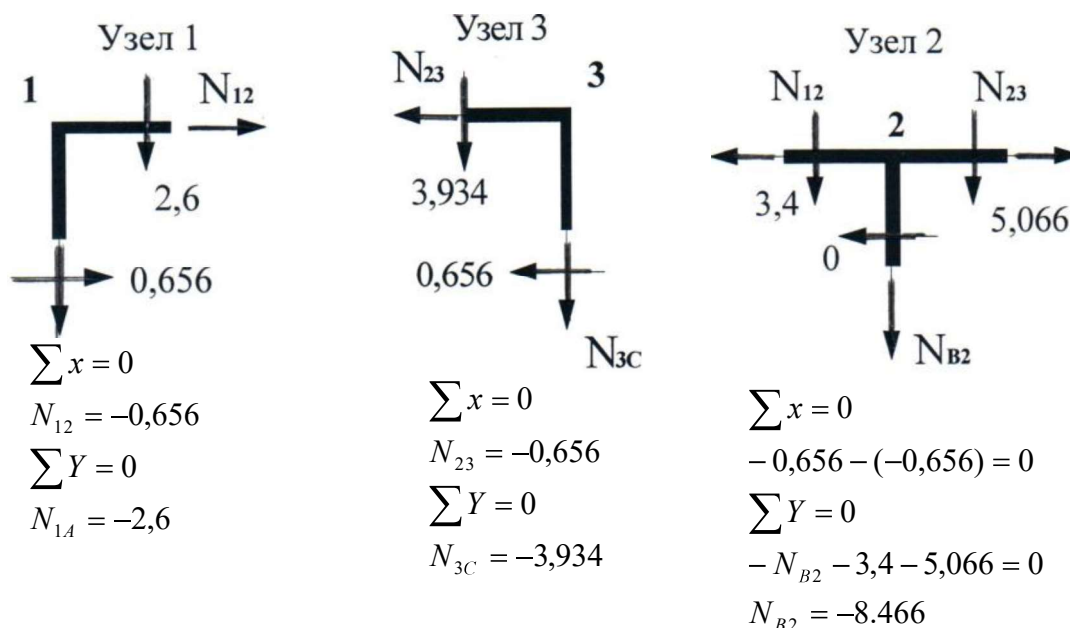
$$R_3 \cdot 5 - 3,198 = 0$$

$$R_3 = \frac{3,198}{5} = 0,656$$

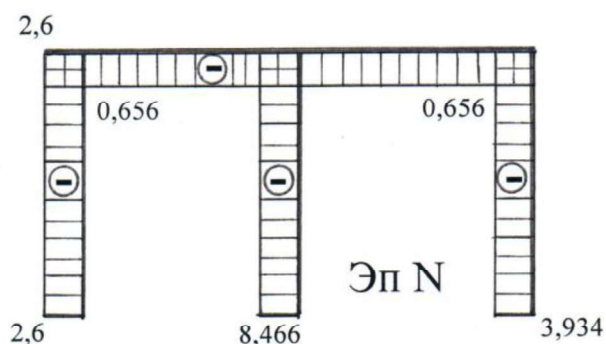
Переносим построенные для каждого стержня эпюры поперечных сил на ось рамы



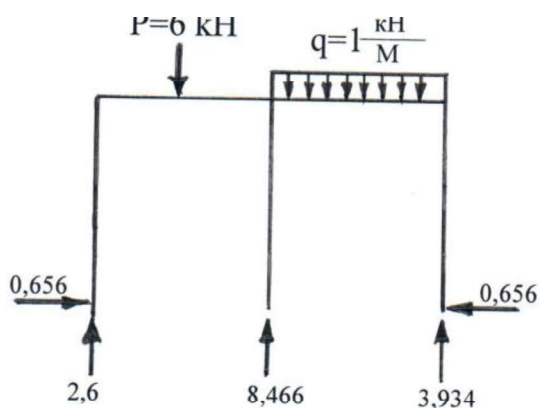
8. Построим расчетную эпюру продольных сил по эпюре поперечных сил, для этого вырезаем узлы рамы и рассматриваем их равновесие:



Переносим найденные значения продольных сил на ось рамы



9. Выполним статическую проверку расчетных эпюр. Рассмотрим равновесие рамы в целом. Величины и направления действия опорных реакций определим по расчетным эпюрам:



$$\sum x = 0 \quad 0,656 - 0,656 = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$2,6 + 8,466 + 3,934 - 6 - 1 \cdot 9 = 0$$

$$15 - 15 = 0$$

Вопросы к самопроверке по теме: «Расчет статически неопределимых рам методом сил»:

1. Какая система называется статически неопределимой?
2. Как определяется степень статической неопределимости рамы?
3. Какие связи принято называть лишними?
4. Что представляет собой основная система метода сил?
5. Какие приемы используются при образовании основной системы метода сил?
6. Какими критериями следует руководствоваться при выборе рациональной основной системы метода сил?
7. В чем состоит физический смысл канонических уравнений метода сил?
6. Что представляют собой неизвестные канонических уравнений метода сил?
7. Что представляют собой коэффициенты при неизвестных канонических уравнений метода сил?
8. Как производится построение эпюры моментов единичного состояния в методе сил?
9. Как определяются коэффициенты при неизвестных канонических уравнений метода сил?
10. Как производятся проверки коэффициентов при неизвестных канонических уравнений метода сил?
11. Что представляют собой свободные члены канонических уравнений метода сил?
12. Как производится построение эпюры моментов грузового состояния в методе сил?
13. Как определяются свободные члены канонических уравнений метода сил?
14. Как производится построение окончательной эпюры изгибающих моментов?
15. Как производится проверка правильности построения эпюры изгибающих моментов?
16. Как производится построение окончательной эпюры поперечных сил по эпюре изгибающих моментов?
17. Как производится построение эпюры продольных сил по эпюре поперечных сил?
18. Как производится проверка правильности построения эпюр поперечных и продольных сил?

Список рекомендуемой литературы:

1. «Строительная механика» под редакцией Даркова А.В. М., Высшая школа , 2004 г.
2. Строительная механика. Под ред. А.Е. Саргсяна. М., Высшая школа , 2000 г
3. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. ЧI. Статически определимые системы. Учебное пособие. Издательство АСВ, 2007
4. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. ЧII. Статически неопределимые системы. Учебное пособие. Издательство АСВ, 2007
5. Смирнов В.А., Городецкий А.С. Строительная механика. Издательство «Юрайт» , 2013г.

Оглавление:

1. Общие рекомендации.....	3
2. Задача 1. Условия задачи и исходные данные.....	4
Расчет статически определимой балки.....	6
Пример расчета статически определимой балки.....	15
3. Задача 2. Условия задачи и исходные данные.....	24
Расчет трехшарнирной арки.....	26
Пример расчета статически трехшарнирной арки	32
4. Задача 3. Условия задачи и исходные данные.....	42
Расчет статически определимой фермы.....	22
Пример расчета статически определимой фермы.....	50
5. Задача 1. Условия задачи и исходные данные.....	57
Расчет статически неопределимой рамы методом сил.....	59
Пример расчета статически неопределимой рамы методом сил...	64
6. Список рекомендуемой литературы.....	72