

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

Архитектурно-строительный факультет

Кафедра строительных материалов и конструкций

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по дисциплине и для самостоятельной работы
студентов специальности

08.05.01 Строительство уникальных
зданий и сооружений

и аспирантов по направлению

08.06.01 Техника и технологии строительства

Краснодар
КубГАУ
2019

Составители: А. К. Рябухин, Н. Н. Любарский, Д. В. Лейер.

Динамика и устойчивость : метод. указания по дисциплине и для самостоятельной работы студентов специальности / сост. А. К. Рябухин, Н. Н. Любарский, Д. В. Лейер. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – 96 с.

В методических указаниях приведены теоретические основы расчета сооружений на динамические воздействия и устойчивость. Уделяется внимание практическим методам расчета сооружений и современным матричным методам. Теоретические материалы сопровождаются примерами расчета и вопросами для самоконтроля знаний.

Предназначено для студентов специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений и аспирантов по направлению подготовки 08.06.01 Техника и технологии строительства.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией архитектурно-строительного факультета Кубанского государственного аграрного университета, протокол № 2 от 22.10.2019.

Председатель
методической комиссии



А. М. Блягоз

- © Рябухин А. К., Любарский Н. Н.,
Лейер Д. В.,
составление, 2019
- © ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный аграрный
университет имени
И. Т. Трубиллина», 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1.Динамические нагрузки и задачи динамического расчета сооружений.....	5
1.1.Динамические нагрузки.....	5
1.2.Задачи динамического расчета сооружений	7
1.3.Степени динамической свободы систем.....	9
2.Колебания систем с одной степенью свободы.....	10
2.1.Свободные колебания системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления.....	13
2.2.Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сопротивления среды.....	14
2.3.Общие замечания к решению задач.....	16
2.4.Вынужденные колебания при действии однократного импульса.....	20
2.5.Вынужденные колебания при действии повторяющихся и периодических импульсов.....	30
2.6.Вынужденные колебания при действии внезапно приложенной постоянной силы.....	35
2.7.Вынужденные колебания при действии гармонической нагрузки.....	39
3.Колебания систем с конечным числом степеней свободы.....	53
3.1.Частоты собственных колебаний.....	53
3.2.Формы собственных колебаний.....	55
3.3.Примеры определения частот и форм собственных колебаний.....	57
3.4.Вынужденные колебания при действии гармонической нагрузки.....	63
3.5.Динамический расчет балок и рам.....	67
3.6.Примеры динамического расчета рамы на гармоническую нагрузку.....	68
4.Колебания систем с бесконечным числом степеней свободы. Приближенные методы определения основной собственной частоты колебаний.....	77
4.1.Энергетический метод. Формулы Рэлея.....	77
4.2.Способ приведенной массы.....	85
4.3.Способ замены распределенной массы сосредоточенными.....	90
4.4.Способ Данкерлея.....	91
Список литературы.....	96

ВВЕДЕНИЕ

Динамика сооружений изучает колебания упругих систем под действием динамических нагрузок. Динамические расчеты существенно отличаются от статических тем, что нагрузки и вызываемые ими усилия и деформации изменяются во времени. Поэтому динамические задачи обычно не дают единственного решения и, приходится рассматривать все моменты времени, когда возникают состояния, предельные для изучаемой конструкции. Кроме того, если при статическом нагружении усилия и деформации зависят только от заданной нагрузки, то при динамическом нагружении эти параметры определяются ускорениями, которые вызывают силы инерции. То есть усилия должны уравнивать не только внешние нагрузки, но и силы инерции, возникающие при колебаниях. Поэтому динамические расчеты сооружений значительно сложнее статических.

Динамика сооружений возникла на базе аналитической механики и теории колебаний. На их основе были решены многие важные задачи: колебания маятника, явление удара, колебания стержня и систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы. Интенсивное развитие теории расчета сооружений на динамические нагрузки привело к возникновению специальных направлений: динамики стержневых систем, пластин, оболочек, динамики оснований и фундаментов, виброизоляции и виброгашения, теории сейсмостойкого строительства, статистической динамики, теории аэрогидроупругости и других. Применение ЭВМ и компьютерной техники ознаменовало новый этап в развитии динамики сооружений. Внедрение матричных форм современных методов конечных и граничных элементов, удобных для применения ПЭВМ, дало возможность численного решения сложных задач по расчету стержневых систем, пластин, оболочек, массивов на гармонические, ударные, импульсивные, ветровые и сейсмические нагрузки, недоступных известным аналитическим методам.

В настоящем учебном пособии изложены только методы динамического расчета стержневых систем при основных видах динамических нагрузок.

В первой главе рассматриваются основные виды динамических нагрузок и задачи динамического расчета систем с различным числом степеней свободы.

Вторая глава посвящена изучению свободных и вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы при действии импульсивных, внезапно приложенных, постоянных и гармонических нагрузок.

Третья глава включает особенности расчета систем с конечным числом степеней свободы при действии гармонической нагрузки и рассматривает динамический расчет балок и рам.

Четвертая глава содержит особенности расчета систем с бесконечно большим числом степеней свободы и описывает некоторые методы определения основной собственной частоты колебаний таких расчетных схем.

Все разделы содержат примеры и упражнения для самостоятельной работы, задания и пояснения к выполнению расчетно-проектировочной работы по динамике сооружений.

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ И ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ

1.1. Динамические нагрузки

Динамические нагрузки представляют собой силы, величины, направление или точки приложения которых изменяются во времени. Практически все нагрузки изменяются во времени, но для многих из них эти изменения происходят настолько медленно, что ими можно пренебречь, и нагрузку принимать статической. Динамическими считаются нагрузки, изменение которых происходит настолько быстро, что при расчете сооружений необходимо учитывать силы инерции. Они возникают вследствие сообщения массам сооружения ускорений при колебаниях. В некоторых случаях эти силы могут достичь значительных величин и вызвать нежелательные явления, как например: чрезмерное раскрытие трещин в элементах железобетонных и каменных конструкций сооружений, появление трещин и разрушений стыковых соединений металлических конструкций, и, даже, к возникновению резонанса, приводящему, как правило, к полному разрушению сооружения.

Основными видами динамических нагрузок являются импульсивные, ударные и гармонические (вибрационные) нагрузки.

Импульсивные — внезапно приложенные и быстро исчезающие нагрузки, продолжительность действия которых мала в сравнении с периодом основного тона собственных колебаний. Выделяют однократный, повторяющийся и периодический импульс. Импульсы, различаемые по форме, могут быть прямоугольными, треугольными, параболическими и др. (рис. 1.1, а, б). Значение однократного импульса равно площади соответствующих фигур. При расчетах удобно пренебрегать малой величиной t , считая импульс S мгновенным.

Периодический импульс состоит из одинаковых импульсов, повторяющихся через равные промежутки времени, называемые периодом T_s (рис. 1.1, в). Импульсивные нагрузки создаются вырубными прессами, штамповочными автоматами, долбежными станками, типографскими машинами.

Ударные нагрузки создаются при ударе тел конечной массы о сооружение, чаще всего при падении тел (рис. 1.2). Они возникают при работе копров, молотов, складировании тяжелых деталей. В отличие от импульсивных нагрузок, в этом случае при загрузке изменяется масса сооружения, так как после удара добавляется масса ударяющегося тела.

Гармонические - периодические нагрузки изменяются по законам (рис. 1.3 а):

$$P(t) = P \sin(\theta t + \alpha); P(t) = P \cos(\theta t + \alpha); \quad (1.1)$$

где P — амплитуда нагрузки; θ — круговая частота, то есть число изменений нагрузки в 2π сек; $(\theta t + \alpha)$ - фаза; α - начальная фаза; T_p — период, т.е. время одного полного изменения нагрузки:

$$T_p = \frac{2\pi}{\theta}. \quad (1.2)$$

Величина, обратная периоду $f_p = 1/T_p$, характеризует число изменений нагрузки в секунду и измеряется в герцах.

Вибрационные нагрузки вызываются силами инерции вращения неуравновешенных частей механизмов и машин: вентиляторов, центрифуг, вибраторов, компрессоров, электромоторов.

Выразим основные параметры гармонической нагрузки. На рис. 1.3, б показана деталь машины, вращающаяся равномерно с угловой скоростью θ и

неуравновешенной массой M на расстоянии r от оси вращения. Нормальное ускорение $W = -r\theta^2$, направленное к оси вращения, создает центробежную силу инерции

$$P = -MW = Mr\theta^2 \quad (1.3)$$

Сила P постоянна по модулю, если пренебречь малой величиной r в сравнении с размерами сооружения, но изменяет при вращении свое направление в зависимости от угла $(\theta t + \alpha)$. Проектируя силу P на оси координат, выразим вертикальную P_y и горизонтальную P_x составляющие нагрузки:

$$P_y = P \sin(\theta t + \alpha); P_x = P \cos(\theta t + \alpha) \quad (1.4)$$

Таким образом, при вращении детали механизма с неуравновешенной массой, на сооружение действуют две гармонические силы, отличающиеся по фазе на $\pi/2$. Круговая частота гармонической нагрузки совпадает с угловой скоростью вращения, а амплитуда определяется выражением (1.3). Кроме указанных, существуют другие виды динамических нагрузок, которые оказывают существенное влияние на процесс колебания сооружений, но не рассматриваются в настоящем пособии.

1.2. Задачи динамического расчета сооружений

Задачами динамического расчета являются:

1. Определение динамических перемещений и скоростей с целью установления возможности их допущения для выполнения нормального технологического процесса и установления допустимых колебаний для различных условий жизни человека (производственных, жилищно-бытовых и т. п.).

2. Обеспечение несущей способности сооружения, которое производится из условия:

$$N_{max}(t) < \Phi \quad (1.5)$$

где $N_{max}(t)$ — максимальные усилия, деформации или напряжения, возникающие в элементах сооружения при колебаниях; Φ — предельно допустимые величины, устанавливаемые из условий прочности, выносливости, жесткости и устойчивости.

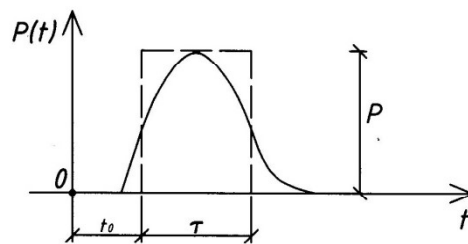
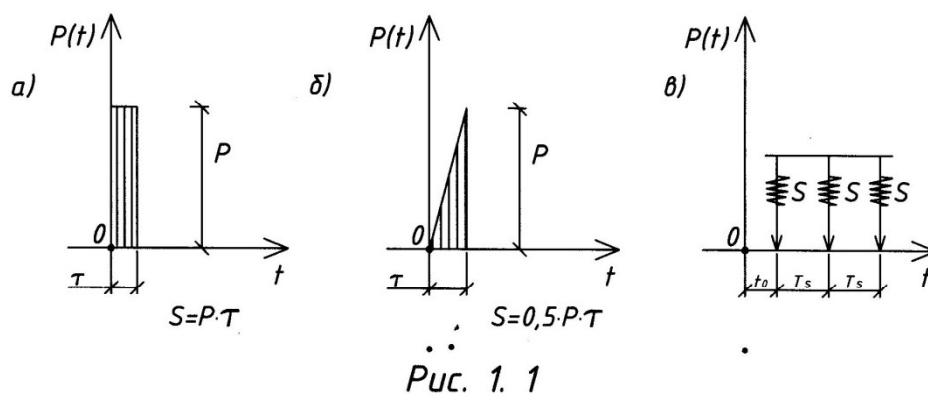


Рис. 1. 2

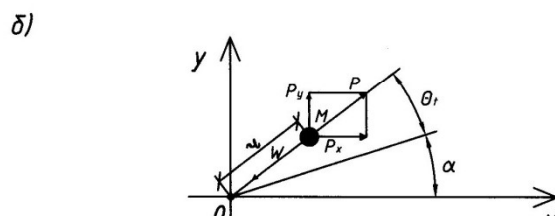
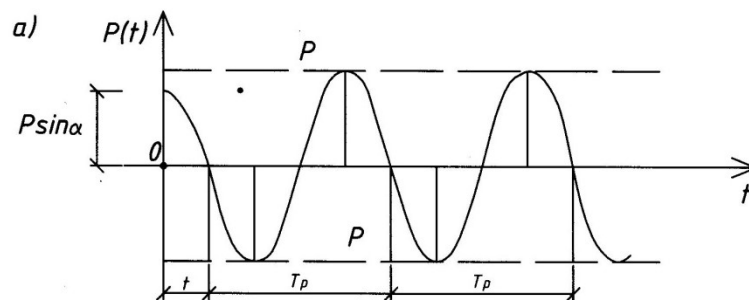


Рис. 1. 3

1.3. Степени динамической свободы систем

Степенью динамической свободы системы называется количество независимых геометрических параметров (обобщенных координат), определяющих положения всех масс системы в любой момент времени при любом ее движении. По сравнению со статикой, в динамике сооружений задача определения степени свободы системы значительно усложняется. Любые сооружения ввиду их деформируемости и распределения собственной массы вдоль осей всех стержней, строго говоря, будут системами с бесконечным числом степеней свободы. Расчет таких систем является весьма трудным и, поэтому, при решении практических задач пользуются упрощенными схемами с конечным числом степеней свободы, стремясь как можно больше понизить это число. Так, в системах, преимущественно работающих на изгиб (в балках, рамах и др.), обычно пренебрегают малыми продольными и угловыми деформациями в сравнении с большими изгибными, а также малыми распределенными массами в сравнении с большими сосредоточенными. Например, в целом ряде случаев можно пренебречь массой балки в сравнении с массой расположенного на ней оборудования.

Практически, степень свободы определяют минимальным количеством условных дополнительных связей, которые нужно ввести в расчетную схему, чтобы полностью устранить возможность перемещений масс системы, пренебрегая при этом перемещениями второго порядка малости.

Пример 1.3.1. Определить степень свободы системы W , состоящей из двутавровой балки № 36 ($q = 0,7$ кН/м) пролетом 2 м с установленным на ней электродвигателем массой 7 тонн.

Решение. При включении двигателя балка вместе с ним будет совершать колебания. Масса двигателя, заключенная в небольшом объеме, в 50 раз больше массы балки, распределенной по ее длине. Естественно, что определяющей движение системы будет масса двигателя, поэтому распределенную массу балки можно не учитывать, считая ее невесомой. Рассматривая движения системы, происходящими только в вертикальной плоскости, находим, что положение массы двигателя определяется тремя координатами: вертикальным, горизонтальным и угловым перемещениями. Таким образом, после элементарного анализа, система с бесконечным числом степеней свободы сведена к системе с тремя степенями

свободы. Если теперь еще учесть, что углы поворота сечений балки при изгибе малы (а при расположении двигателя в середине пролета угол поворота сечения вообще равен нулю), то, исключив еще из рассмотрения горизонтальные перемещения, обусловленные продольной деформацией балки, приходим к упрощенной схеме, которая является системой с одной степенью свободы (рис. 1.4).

Пример 1.3.2. Определить степень свободы систем (рис. 1.5), где на балке, опирающейся одним концом на жесткую, а другим — на пружинную опору жесткостью «с», расположены три точечные массы.

Решение. С учетом условий примера 1.3.1 балка обладает тремя степенями свободы (рис. 1.5 а). Если жесткость пружины «с» будет значительно меньше, чем жесткость балки при изгибе EI , то балку можно считать недеформирующейся ($EI = \infty$). В таком случае система имеет одну степень свободы: движение всех трех масс характеризуется только углом поворота жесткого диска АВ (рис. 1.5, б).

Пример 1.3.3. Пренебрегая продольными деформациями, определить степень динамической свободы системы, изображенной на рис. 1.6. а.

Решение. Для неподвижного закрепления массы M в направлениях возможных перемещений вдоль осей координат x и y , необходимо ввести в расчетную схему две условные связи - горизонтальную и вертикальную, обеспечивающие полную неподвижность системы. Следовательно, система обладает двумя степенями свободы $W = 2$.

Пример 1.3.4. Считая изгибную жесткость балки в сравнении с жесткостями пружин бесконечно большой, определить степень ее динамической свободы.

Решение. Закрепив, условной связью I точку A системы (рис. 1.7), получим неподвижность системы в целом, а, следовательно и возможность определить ее как систему с одной степенью свободы.

Пример 1.3.5. Самостоятельно определить степень динамической свободы упругих систем, представленных на рис. 1.8.

2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Различают свободные и вынужденные колебания систем. Вынужденными будем называть колебания, вызванные воздействием возмущающей силы. Свободными — колебания, вызванные начальными возмущениями.

В динамике сооружений под начальными возмущениями понимают либо начальную скорость, либо начальное перемещение.

Пусть на систему с одной степенью свободы действует динамическая нагрузка $P(t)$ (рис. 2.1).

В момент времени t на массу M будут действовать силы:

1. Собственный вес массы $Q = mg = c y_{cm}$;
2. Возмущающая сила $P(t)$;

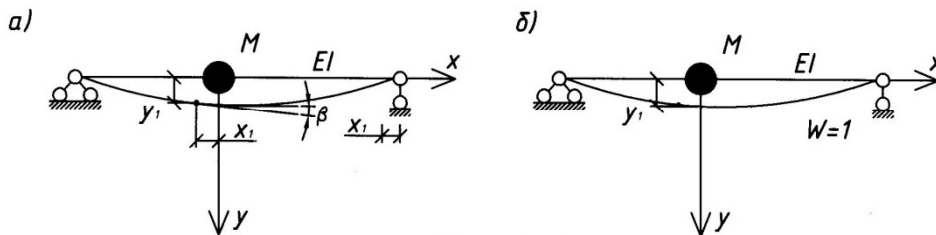


Рис. 1. 4

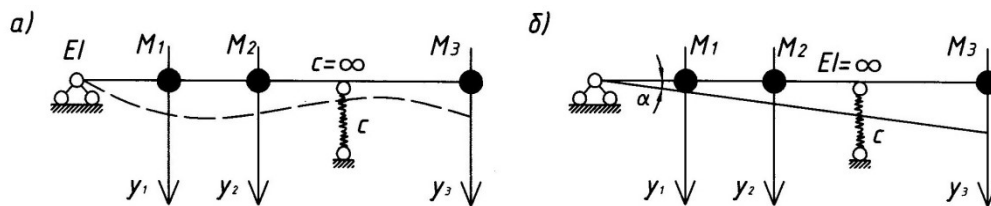


Рис. 1. 5

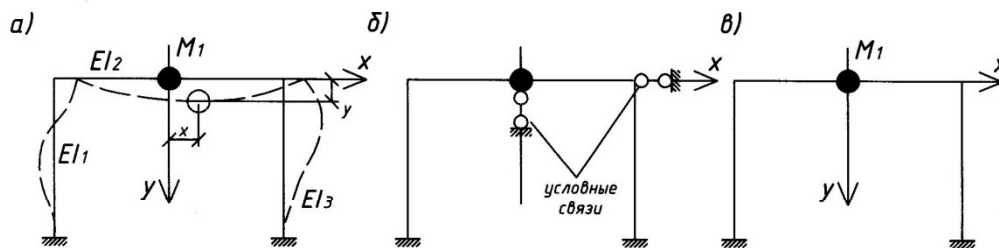


Рис. 1. 6

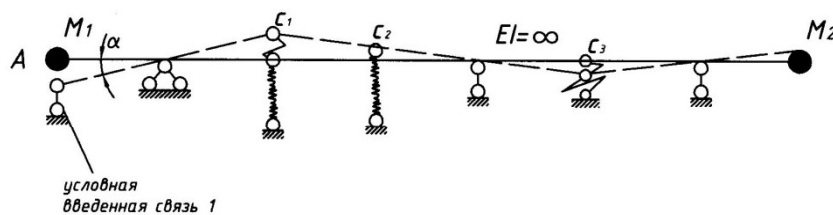


Рис. 1. 7

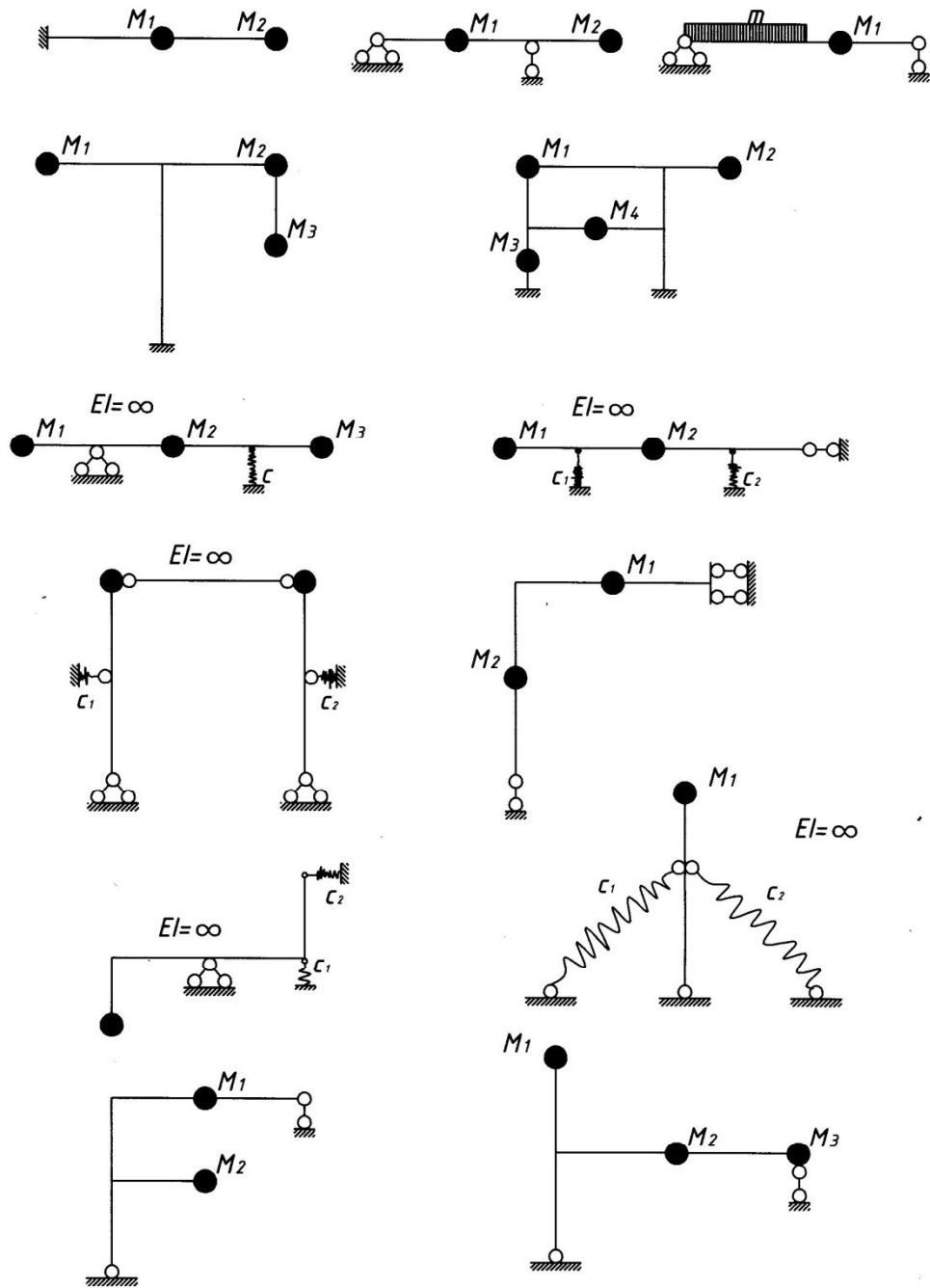


Рис.1.8

3. Восстанавливающая сила упругости $F_y = c(y_{ст} + y)$;

4. Сила инерции $F_u = MW = M\ddot{y}$, где $\ddot{y}$ - ускорение, а "с" - коэффициент жесткости системы, численно равный силе, которую нужно приложить к массе, чтобы перемещение ее равнялось единице; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Применяя принцип Даламбера и, используя условие равновесия в виде $\sum y = 0$, получим дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы:

$$M\ddot{y} + c(y_{ст} + y) - cy_{ст} - P(t) = 0,$$

или:
$$M\ddot{y} + cy = P(t). \quad (2.1)$$

2.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления

Если в уравнении (2.1) принять $P(t) = 0$, то получим дифференциальное уравнение движения системы при свободных колебаниях без учета сил сопротивления:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \text{где: } \omega = \sqrt{\frac{c}{M}}. \quad (2.2)$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (2.3)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий задачи:

при $t = 0$, и $y = y_0$ - начальное отклонение, $V = V_0$ — начальная скорость.

После подстановки в (2.3), получим:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (2.4)$$

где ω - круговая или циклическая частота свободных колебаний (или число колебаний за 2π секунд), а

$$C = \frac{1}{\delta_{11}} \quad (2.5)$$

$$\text{и,} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{M \delta_{11}}}.$$

Если ввести другие произвольные постоянные a и α , положив $C_1 = a \sin \alpha$ и $C_2 = a \cos \alpha$, то можно получить следующее выражение:

$$y = a \sin(\omega t - \alpha). \quad (2.6)$$

Выражение (2.6), как и (2.4), представляет собой уравнение движения системы, которое осуществляется по гармоническому закону (рис. 2.2, а).

В приведенных выражениях:

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}} - \text{амплитуда колебаний}; \quad (2.7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0 \omega}{\dot{y}_0}, \quad (2.8)$$

α – начальная фаза, определяемая начальными условиями;

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \text{период колебаний}. \quad (2.9)$$

Кроме круговой частоты существует понятие технической частоты колебаний n – число колебаний в минуту, при этом:

$$n = 60/T = 60\omega/2\pi = 30\omega/\pi. \quad (2.10)$$

2.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сопротивления среды

Если в уравнение (2.1) добавить силу сопротивления среды, считая ее изменение пропорциональной скорости движения системы $F_{\text{сопр}} = -b\dot{y}$, то получим при $P(t) = 0$ дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы с учетом сопротивления среды:

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + b\dot{y} + cy &= 0, \quad \text{или} \\ \ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

общим решением которого будет выражение:

$$y = e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t),$$

где: $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$, или:

$$y = ae^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \alpha). \quad (2.12)$$

В (2.11) обозначено: $2\varepsilon = M/b$ и $\omega^2 = c/M$.

При известных начальных условиях, по аналогии с предыдущим, уравнение движения примет вид:

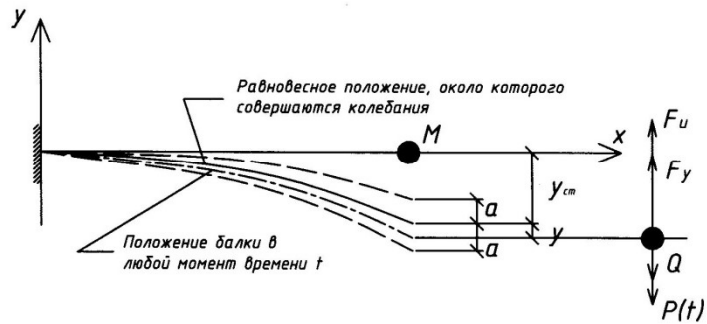


Рис. 2. 1

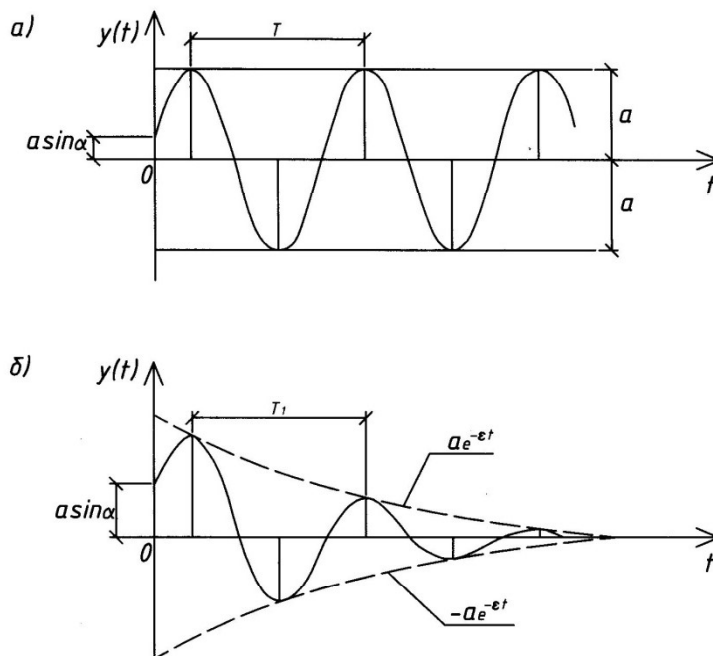


Рис. 2. 2

$$y = -e^{-\varepsilon t} \left(y_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{y}_0 + \varepsilon y_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right). \quad (2.13)$$

График, характеризующий движение системы с учетом сопротивления среды, показан на рис. 2.2,б.

2.3. Общие замечания к решению задач

При решении задач на определение частоты и периода свободных колебаний систем с одной степенью свободы, обычно, пренебрегают перемещениями второго порядка малости и учетом сил сопротивления среды, считая $\omega_1 = \omega$ и $T_1 = T$, так как величина ε в сравнении с ω мала (см. формулы 2.12). Собственная частота ω определяется по формулам 2.2 и 2.5 в зависимости от условия задачи. Так, при определении ω в системах, состоящих из стержней, жесткости которых равны бесконечности, а в качестве опорных закреплений наряду с жесткими опорами используются другие элементы в виде пружин или упругих подвесок, задача может решаться как статическим, так и энергетическим способами. Последний способ более предпочтителен, так как не требует определения реакций в жестких опорах. Упругие подвески длиной $\ell_{подв.}$ и жесткостью на растяжение (сжатие) $EА$ следует рассматривать как пружины с коэффициентами жесткости $c = EA/\ell_{подв.}$

При решении статически определимых или статически неопределимых систем, состоящих из упругих стержней, жесткости EJ которых имеют конечные значения, величина δ_{11} определяется по общим правилам строительной механики.

Пример 2.3.1. Определить частоту и период свободных колебаний системы, изображенной на рис. 2.3.

Решение. Задачу удобнее решать с использованием формулы 2.2, где $\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{M_1}}$, а c_{11} - коэффициент жесткости системы в точке сосредоточения массы M_1 - величины, численно равной силе, вызывающей перемещение равное единице этой точки. Если приложить такую силу в точке «1», то перемещение получит вся система (рис. 2.3.б), причем точки «2» и «3» переместятся, соответственно, на Δ_2 и Δ_3 , а упругие пружины отреагируют на такое воздействие силами $c_2 \Delta_2$ и $c_3 \Delta_3$, где c_2 и c_3 - коэффициенты жесткости соответствующих пружин. В шарнирно неподвижной опоре «0» также возникнет реакция, составляющие которой в этом

примере можно не определять, приняв в уравнении равновесия при решении задачи статическим способом эту точку за моментную.

Статический способ

Составляя для отклоненного положения системы уравнение равновесия в виде $\sum M_0 = 0$, получим:

$$-C_{11}(a+b) + C_2\Delta_2b + C_3\Delta_3d = 0,$$

$$\text{и,} \quad C_{11} = (C_2\Delta_2b + C_3\Delta_3d)/(a+b),$$

где неизвестные перемещения Δ_2 и Δ_3 определяются из подобия треугольников:

$$\Delta_2 = b / (a+b) \quad \text{и} \quad \Delta_3 = d / (a+b).$$

Подставляя Δ_2 и Δ_3 в выражение для C_{11} , получим

$$C_{11} = (C_2b^2 + C_3d^2)/(a+b)^2.$$

Энергетический способ

Для отклоненного положения системы составим уравнение работ сил на перемещениях точек системы, вызванных этими силами: $\sum A_i = 0$.

$$\frac{1}{2} C_{11} l^2 - \frac{1}{2} C_2 \Delta_2^2 - \frac{1}{2} C_3 \Delta_3^2 = 0, \quad \text{или}$$

$$C_{11} = C_2 \Delta_2^2 + C_3 \Delta_3^2.$$

Учитывая предыдущее решение для Δ_2 и Δ_3 , получим то же выражение для C_{11} , что и в статическом способе.

Тогда частота и период свободных колебаний системы будут равны:

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{11}}{M_1}} = \sqrt{\frac{C_2b^2 + C_3d^2}{M_1(a+b)^2}} = \frac{1}{a+b} \sqrt{\frac{C_2b^2 + C_3d^2}{M_1}};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi(a+b)}{\sqrt{\frac{C_2b^2 + C_3d^2}{M_1}}}.$$

Пример 2.3.2. Определить частоту и период свободных колебаний системы, изображенной на рис. 2.4.

Решение. Задачу удобнее решать энергетическим способом, так как при этом отпадает необходимость в определении реакций в опорах A и B . Для отклоненного положения системы составим уравнение работ сил на перемещениях ее точек.

Перемещения Δ_3 и Δ_5 определим из подобия треугольников, при этом они окажутся равными $\Delta_3 = 2/3$, $\Delta_5 = 1/6$, а частота и период колебаний будут равны:

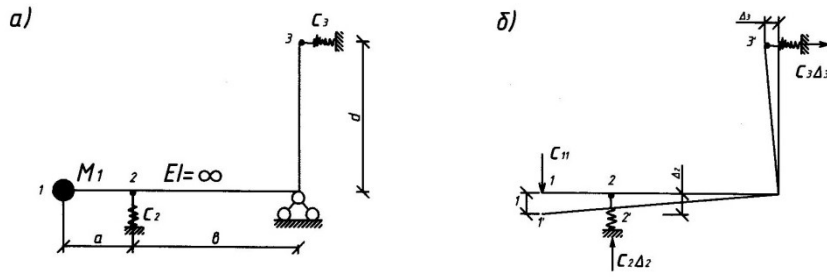


Рис. 2. 3

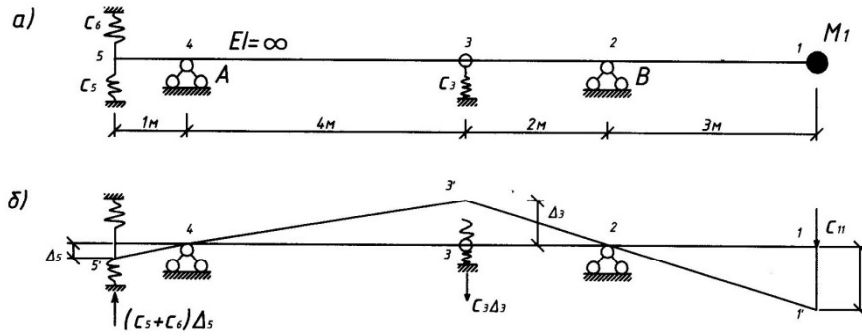


Рис. 2. 4

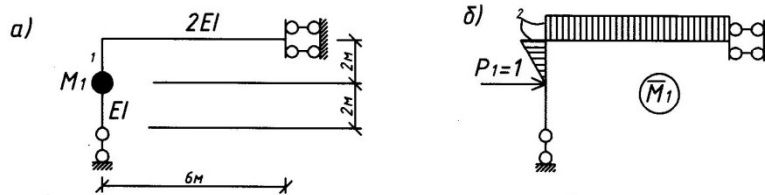


Рис. 2. 5



Рис. 2. 6

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{11}}{M_1} - \frac{1}{3}} \sqrt{\frac{4C_3 + \frac{(C_5 + C_6)}{4}}{M_1}};$$

$$T = \frac{2\pi \cdot 3}{\sqrt{\frac{4C_3 + \frac{(C_5 + C_6)}{4}}{M_1}}} = \frac{6\pi}{\sqrt{\frac{4C_3 + \frac{(C_5 + C_6)}{4}}{M_1}}} = 0,125 \text{ с.}$$

Пример 2.3.3. Определить частоту и период свободных колебаний системы, представленной на рис. 2.5.

Решение. Для определения ω используем формулу 2.5.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = \frac{44}{3EJ},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M_1 \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{3EJ}{44M_1}}.$$

При жесткости $EJ = 2 \cdot 10^4 \text{ кН м}^2$ и массе $M = 500 \text{ кг}$, частота и период колебаний будут

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^4}{44 \cdot 0,5}} = 52,2 \text{ с}^{-1}, \quad \text{а} \quad T = \frac{2\pi}{52,2} = 0,12 \text{ с.}$$

Пример 2.3.4. Определить частоту и период свободных колебаний статически неопределимой балки рис. 2.6. при следующих данных: $EJ = 6 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$, $M_I = 0,2 \text{ т}$.

Решение. При определении перемещения δ_{11} воспользуемся формулой

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1^0}{EI} ds. \quad \text{Эпюры } \overline{M}_1 \text{ и } \overline{M}_1^0 \text{ показаны на рис. 2.6.б.}$$

$$\delta_{11} = \frac{7\ell^3}{768EI}.$$

Частота и период колебаний будут равны:

$$\omega = \sqrt{\frac{768 \cdot EJ}{7\ell^3 M_1}} = \sqrt{\frac{768 \cdot 6 \cdot 10^4}{7 \cdot 4^3 \cdot 0,2}} = 717 \text{ с}^{-1}; \quad T = 0,0088 \text{ с.}$$

Пример 2.3.5. Для систем, представленных на рис. 2.7, самостоятельно определить собственную частоту и период колебаний.

2.4. Вынужденные колебания при действии однократного импульса

В результате приложения однократного импульса к неподвижной массе система будет совершать свободные колебания. Используя закон движения для свободных затухающих колебаний (2.13) можно записать уравнение движения системы после воздействия мгновенного импульса

$$y = \frac{S}{M\omega_1} e^{-\varepsilon t} \sin \omega_1 t \quad (2.14)$$

Если пренебречь силами сопротивления, то, полагая $\varepsilon = 0$ и $\omega_1 = \omega$, получим

$$y = \frac{S}{M\omega} \sin \omega t. \quad (2.15)$$

Здесь движение имеет вид гармонических колебаний с амплитудой $A = \frac{S}{M\omega}$ и собственной круговой частотой ω .

Порядок расчета на действие однократного импульса:

1. величина импульса S и параметры исследуемой системы задаются;
2. вычисляют частоту собственных колебаний системы;
3. вычисляют максимальное динамическое перемещение системы в точке расположения сосредоточенной массы по формуле

$$y_{max} = A = \frac{S}{M\omega} \quad (2.16)$$

4. используя геометрические зависимости, определяют перемещение $y_{i,max}$ в исследуемой точке системы;

5. при определении M_{max} , Q_{max} , N_{max} , вызванных действием S , влияние массы M и импульса S заменяют эквивалентной статистической силой P_{cm} , вызывающей такое же перемещение системы, как и импульс S . Величину этой силы определяют из уравнения

$$P_{cm} \delta_{ii} = y_{i,max} \quad (2.17)$$

6. усилия M_{max} , Q_{max} , N_{max} в системе определяют от действия P_{cm} , как в системе, нагруженной статистической нагрузкой;
7. напряжение в элементах системы, испытывающих растяжение или сжатие при

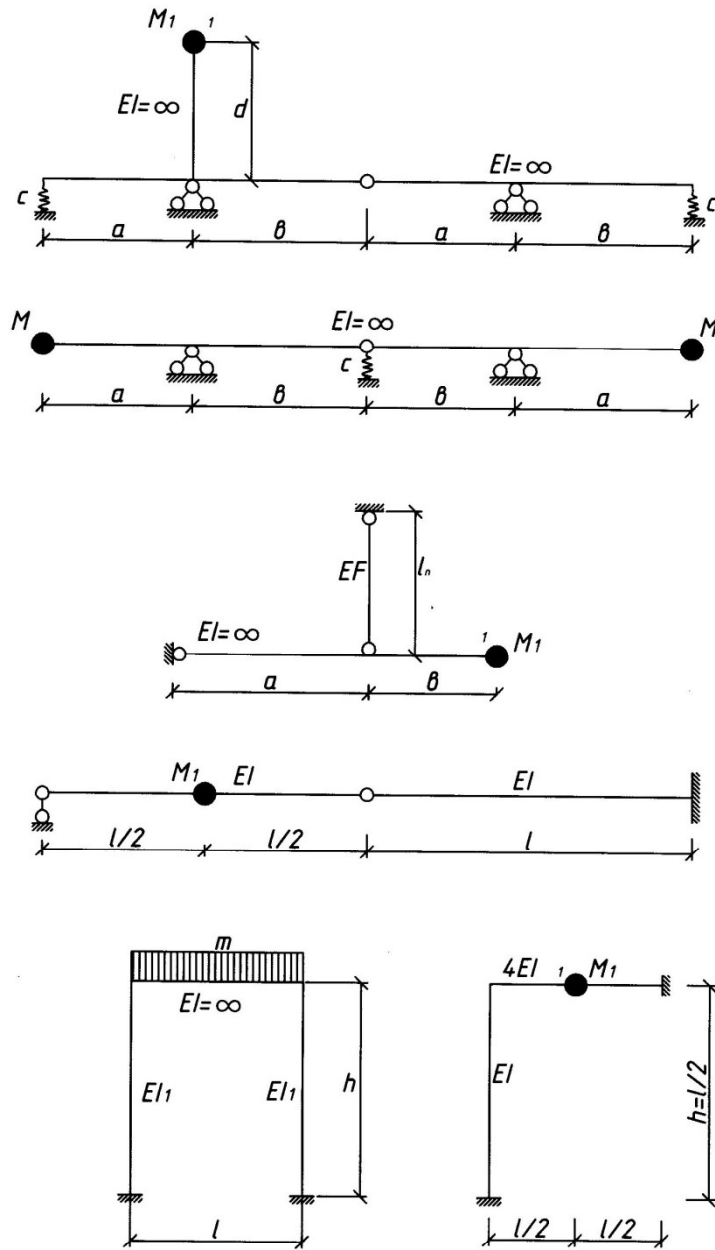


Рис. 2. 7

ее колебаниях (подвески, растяжки, упругое основание и т. д.), удобно определять по формуле Гука:

$$\sigma_{max} = \Delta \ell_{max} E / \ell \quad (2.18)$$

где: $\Delta \ell_{max}$ — наибольшее изменение длины элемента от действия S ; ℓ - длина элемента.

Пример 2.4.1. Определить максимальное перемещение точки «2» системы (рис. 2.8) от действия импульса S , если $\ell_1 = 2$ м; $\ell_2 = 3$ м; $M = 50$ кг; $S = 100$ Нс; $C = 2 \cdot 10^4$ Н/м.

Решение.

Частота собственных колебаний системы:

$$\omega = \frac{\ell_1}{\ell_2} \sqrt{\frac{C}{M}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 \times 10^4}{50}} = 13,33 \text{ с}^{-1}$$

Перемещение массы в точке «1»:

$$y_{1,max} = \frac{S}{M\omega} = \frac{100}{50 \times 13,33} = 0,15 \text{ м.}$$

Максимальное перемещение точки «2»:

$$y_{2,max} = y_{1,max} \frac{\ell_1}{\ell_2} = 0,15 \times \frac{2}{3} = 0,1 \text{ м.}$$

Пример 2.4.2. Определить максимальное перемещение точки «2» и максимальный изгибающий момент на опоре В от действия импульса для системы, изображенной на рис. 2.9. а, если $\ell_1 = 2$ м; $\ell_2 = 3$ м, $M = 50$ кг, $EJ = 2 \cdot 10^5$ Нм², $S = 100$ Нс.

Решение.

Частота собственных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} \times M}} = \sqrt{\frac{3EI}{(\ell_1 + \ell_2^2 + \ell_2^3)M}} = 16,33 \text{ с}^{-1}$$

Максимальное отклонение массы в точке «1»

$$y_{1,max} = \frac{S}{M \times \omega} = \frac{100}{50 \times 16,33} = 0,122 \text{ м.}$$

Заменяем влияние импульса эквивалентной силой P_{cm} , действующей статически и

вызывающей такое же перемещение точки «1», как и импульс S (рис. 2.9,б):

$$P_{cm} \cdot \delta_{11} = y_{1,max} \quad , \quad P_{cm} = y_{1,max} \frac{1}{\delta_{11}} = 0,122 \frac{3 \times 2 \times 10^5}{(2 \times 3^2 + 3^2)} = 1627 \text{ Н.}$$

Определим динамическое перемещение $y_{2,max}$, как прогиб точки «2» от статического действия силы P_{cm} по схеме рис. 2.9б:

$$y_{2,max} = P_{cm} \times \delta_{21} \quad ,$$

$$\text{где} \quad \delta_{21} = \frac{l_1^2 \times l_2}{16EI} = \frac{2^2 \times 3}{16 \times 2 \times 10^5} = 0,375 \times 10^{-5} \frac{\text{м}}{\text{Н}}.$$

Тогда:

$$y_{2,max} = 1627 \cdot 0,375 \cdot 10^{-5} = 0,0061 \text{ м,}$$

а динамический изгибающий момент на опоре В будет равен

$$M_{B,max} = 1627 \cdot 3 = 4881 \text{ Н}\cdot\text{м} = 4,881 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Пример 2.4.3. Определить максимальное напряжение в подвеске системы, показанной на рис. 2.10, от действия импульса S , если: $\ell_1 = 2 \text{ м}$, $\ell_2 = 3 \text{ м}$, $\ell_n = 2 \text{ м}$, $M = 50 \text{ кг}$, $A_n = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $S = 100 \text{ Нс}$.

Решение:

Частота собственных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{11}}{M}} = \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} \sqrt{\frac{EA_n}{M\ell_n}} = \frac{2}{2+3} \sqrt{\frac{2,1 \times 10^7}{50 \times 2}} = 183,3 \text{ с}^{-1}.$$

Перемещение сосредоточенной массы в точке «1»

$$y_{1,max} = \frac{S}{M\omega} = \frac{100}{50 \cdot 183,3} = 0,010911 \text{ (м)}.$$

Удлинение подвески – перемещение точки «2» системы

$$\Delta \ell_n = y_{2,max} = y_{1,max} \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} = 0,010911 \cdot 2 / (2+3) = 0,00436 \text{ м}.$$

Напряжение в подвеске, согласно закону Гука

$$\sigma_{n,max} = \Delta \ell_n E_n / \ell_n = 0,00436 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} / 2 = 458260 \text{ кН/м}^2.$$

Пример 2.4.4. Определить самостоятельно максимальное перемещение точки «2» систем, показанных на рис. 2.11. 2.12, от действия однократного импульса S . при следующих данных: $\ell_1 = 2 \text{ м}$; $\ell_2 = 3 \text{ м}$; $M = 50 \text{ кг}$; $S = 100 \text{ Нс}$; $c = 10^5 \text{ Н/м}$; $EI = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$.

Пример 2.4.5. Определить самостоятельно максимальный изгибающий момент в

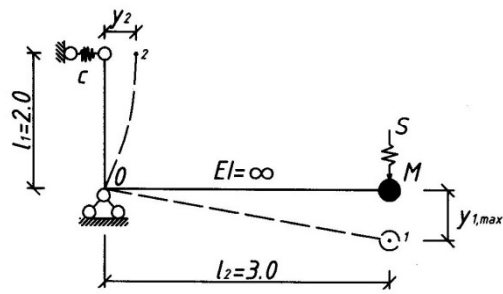


Рис. 2. 8

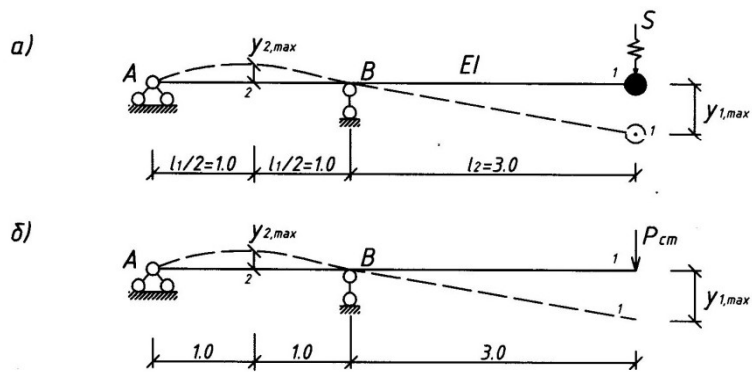


Рис. 2. 9

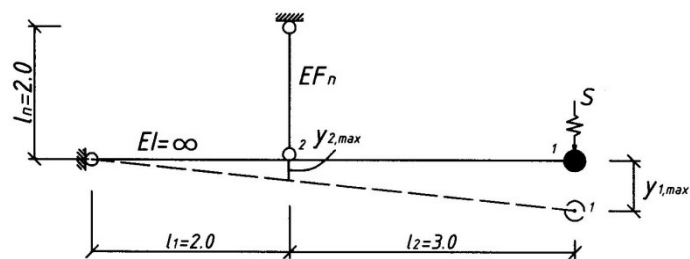


Рис. 2. 10

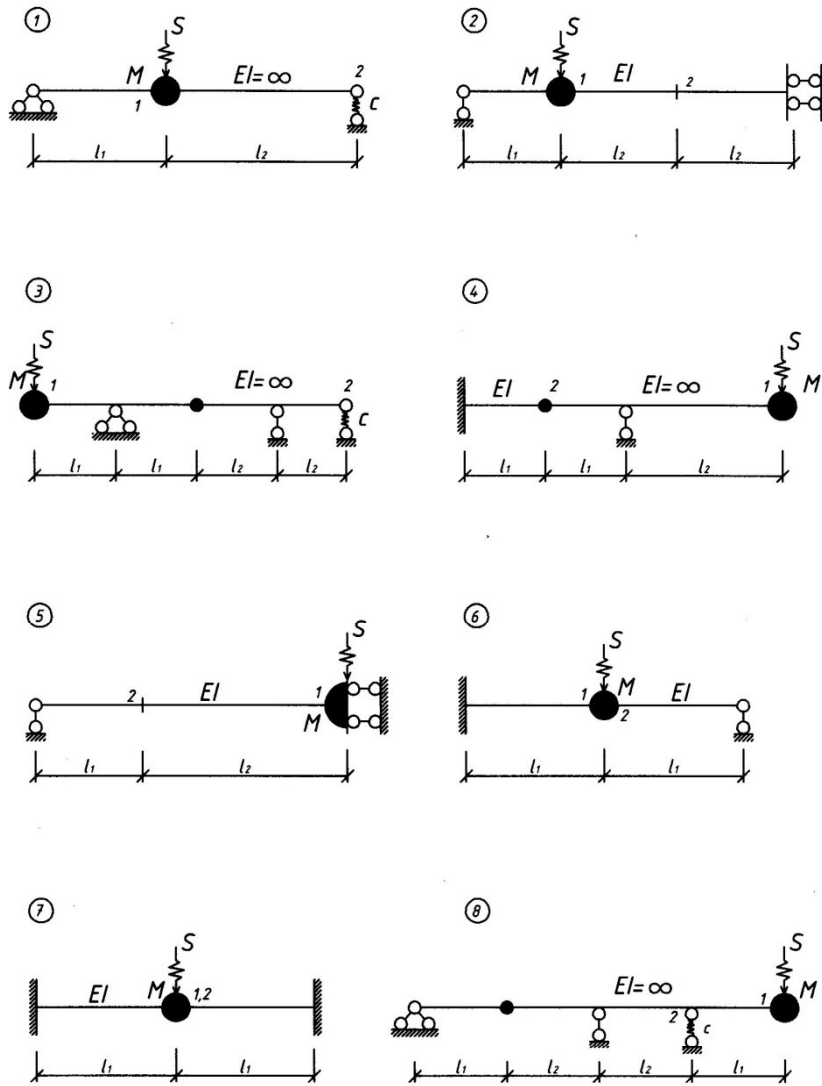
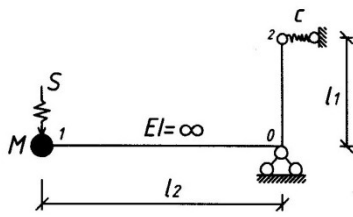
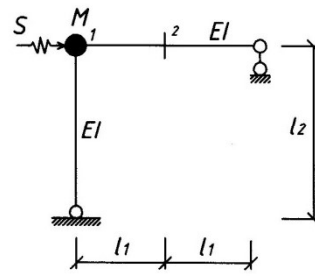


Рис. 2.11

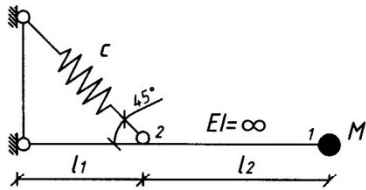
9



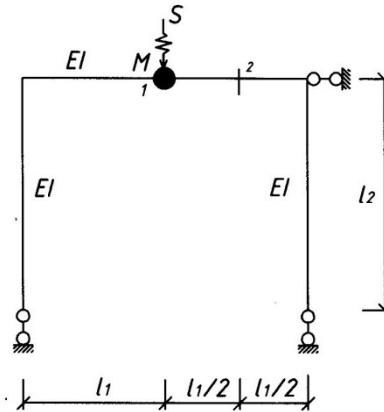
10



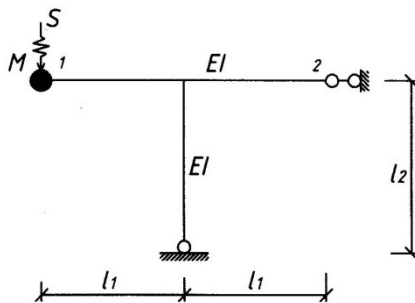
11



12



13



14

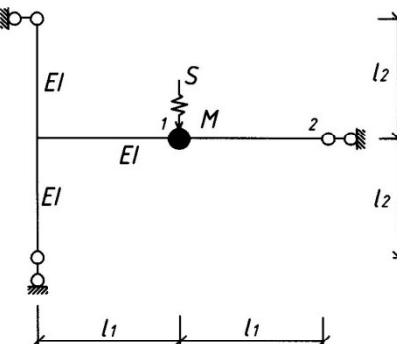


Рис. 2.12

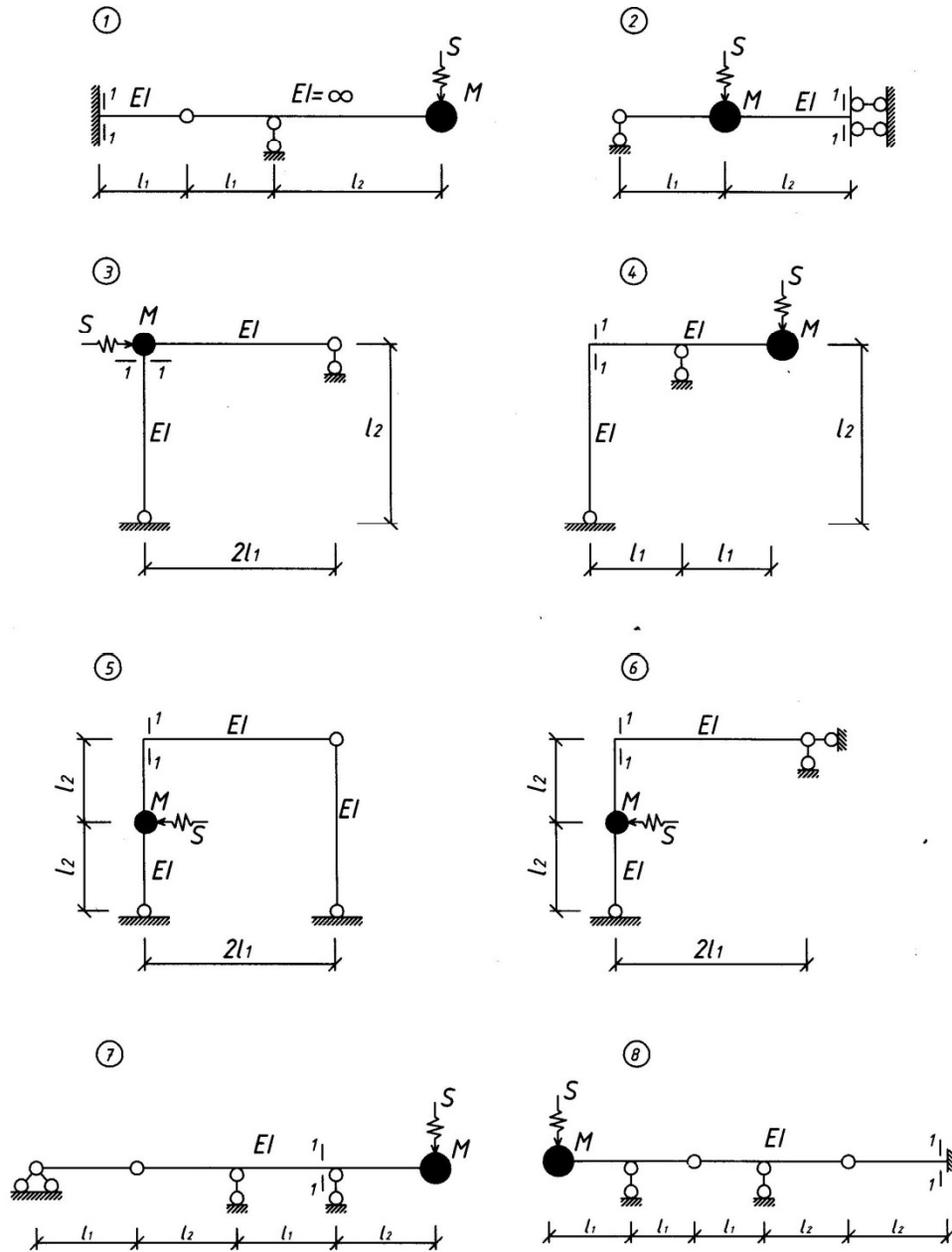
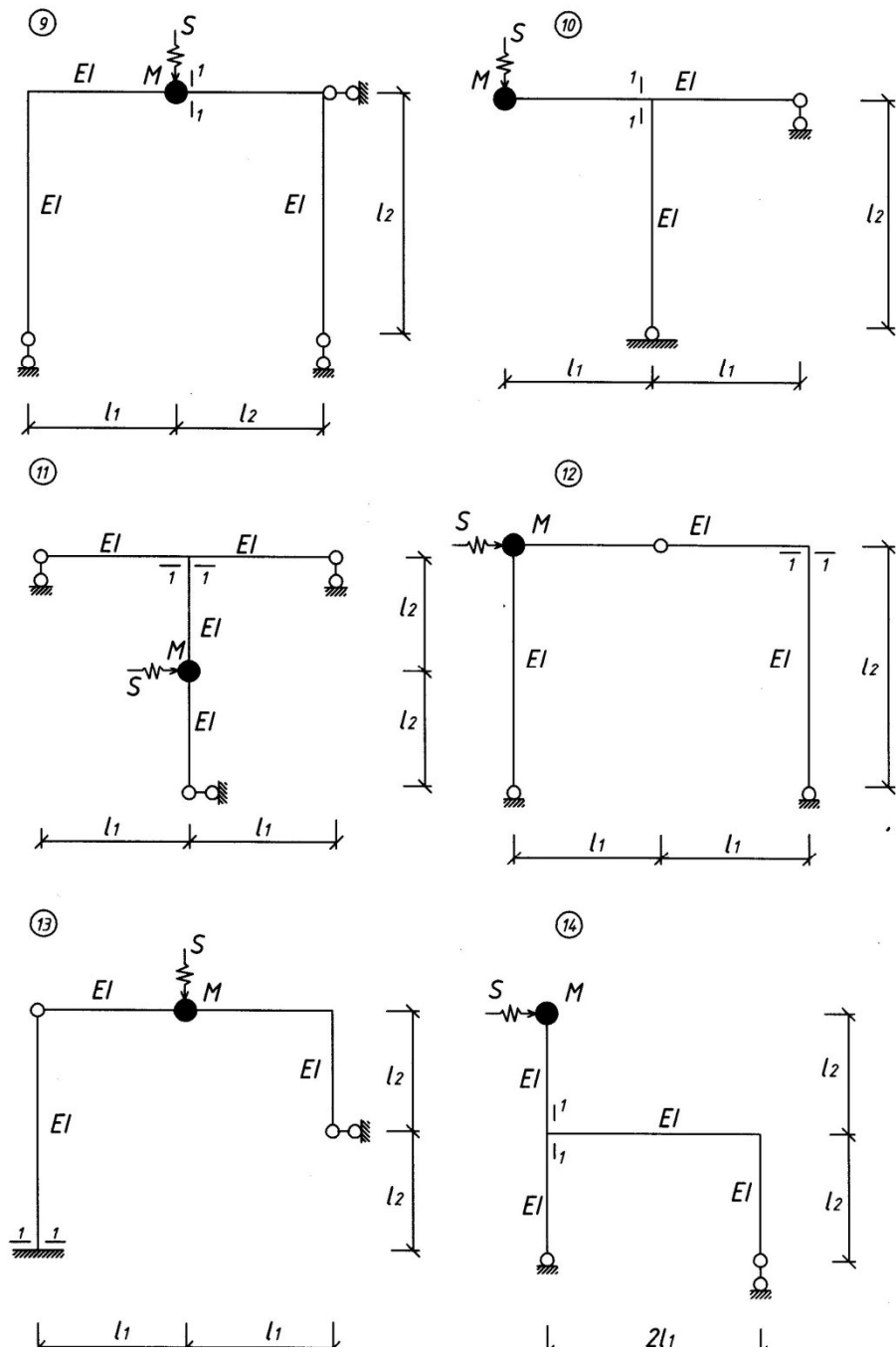
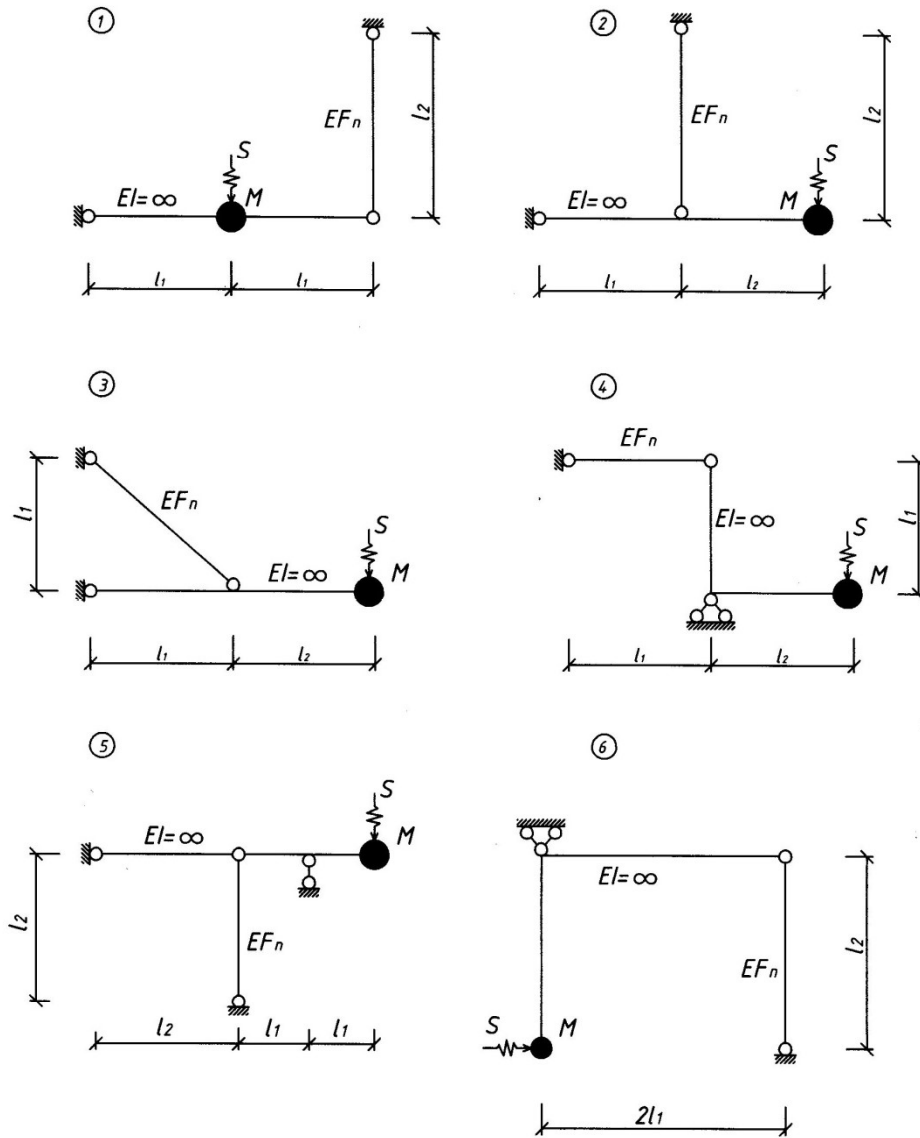


Рис. 2.13



Puc.2.14



Puc.2.15

сечении 1-1 от действия однократного импульса S для систем, показанных на рис. 2.13, 2.14, при следующих данных : $\ell_1 = 2$ м, $\ell_2 = 3$ м; $M = 100$ кг; $S = 50$ Нс; $EI = 1,1 \times 10^6$ Н · м².

Пример 2.4.6. Определить самостоятельно максимальное напряжение в подвеске от действия однократного импульса S для систем, показанных на рис. 2.15, при следующих данных: $\ell_1 = 2$ м; $\ell_2 = 3$ м; $M = 100$ кг; $S = 50$ Нс; $E_n = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $A_n = 2 \cdot 10^{-4}$ м².

2.5. Вынужденные колебания при действии повторяющихся и периодических импульсов

Закон движения системы в момент времени t от действия « n » мгновенных импульсов S , различной величины и действующих в заданные моменты времени t , определяется с учетом затухания колебаний по формуле

$$y = \frac{1}{M\omega} \sum_{i=1}^n S_i \cdot e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_i)} \cdot \sin \omega(t-t_i). \quad (2.19)$$

Здесь $\varepsilon = \frac{\gamma\pi}{T} = \gamma \frac{\omega}{2}$, γ — коэффициент неупругого сопротивления материала.

Перемещение системы может достигать максимума в один из моментов времени $t = t_i + \frac{T}{4} = t_i + \frac{\pi}{2\omega}$. Поэтому для определения y_{max} по формуле (2.19) должны быть вычислены перемещения после действия каждого импульса S_i , наибольшее из которых будет y_{max} .

Если мгновенные импульсы периодические, т.е. одинаковой величины и действуют через равные промежутки времени $T_s = T$, то максимальное перемещение системы от « n » импульсов достигнет в момент времени

$$t = (n-1)T + \frac{T}{4} = T[(n-1)+0,25]$$

и будет определяться по формуле

$$y_{max} = \frac{S}{M\omega} \sum_{i=1}^n e^{-\gamma\pi[(n-1)+0,25]} \quad (2.20)$$

Здесь учтено, что $\sin \omega t = 1$.

При достаточно большом количестве импульсов ($n \rightarrow \infty$) нарастание колебаний прекращается и система совершает установившиеся движения с амплитудным значением

$$y_{max} = \frac{S}{M\omega} \frac{1}{1-e^{-\gamma\pi}} \quad \text{или} \quad y_{max} = B_I \frac{S}{M\omega}. \quad (2.21)$$

Значение B_I зависит от γ . Так, для некоторых значений γ , максимальное

перемещение системы равно:

$$\text{при } \gamma = 0,025; \quad y_{\max} = 13,35 \frac{S}{M\omega};$$

$$\text{при } \gamma = 0,05; \quad y_{\max} = 6,88 \frac{S}{M\omega};$$

$$\text{при } \gamma = 0,10; \quad y_{\max} = 3,7 \frac{S}{M\omega}.$$

При расчете упругих систем на действие повторяющихся и периодических импульсов решаются те же задачи, что и при действии однократного импульса. Порядок решения задач на определение перемещений, усилий, напряжений, вызванных периодическими импульсами такой же, как и при однократном импульсе.

Пример 2.5.1. В момент времени $t = 0,7$ с, определить перемещение массы M упругой системы от действия трех импульсов:

$$S_1 = 10 \text{ Нс}; S_2 = 30 \text{ Нс}; S_3 = 20 \text{ Нс}, \text{ для которых } t_1 = 0,$$

$$t_2 = 0,2 \text{ с}, t_3 = 0,5 \text{ с}, \text{ если } \omega = 60 \text{ с}^{-1}, M = 100 \text{ кг}, \gamma = 0,1.$$

Решение.

Применяя формулу, 2.19 получим

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{M\omega} [S_1 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1) + S_2 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_2)} \sin \omega(t-t_2) + \\ & + S_3 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_3)} \sin \omega(t-t_3)] = \frac{1}{100 \cdot 60} [10 e^{-3 \cdot 0,7} \sin 60 \cdot 0,7 + 30 e^{-3 \cdot 0,5} \sin 60 \cdot 0,5 + \\ & + 20 e^{-3 \cdot 0,2} \sin 60 \cdot 0,2] = -0,0025 \text{ м}. \end{aligned}$$

Пример 2.5.2. При данных предыдущего примера определить максимальное отклонение $y_{\max}$ массы M .

Решение.

По формуле (2.19) определяем поочередно максимальное перемещение массы после действия первого, второго и третьего импульсов.

После действия $S_1 = 10 \text{ Нс}$ в момент времени

$$t = 0 + 0,25T = \frac{\pi}{2\omega} = 0,02618 \text{ с}.$$

$$\begin{aligned} y_{1,\max} &= \frac{1}{M\omega} S_1 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1) = \\ &= \frac{1}{100 \cdot 60} 10 e^{-3 \cdot 0,02618} \sin 60 \cdot 0,02618 = 0,0015 \text{ м}. \end{aligned}$$

$$\text{В момент времени } t = t_2 + \frac{\pi}{2\omega} = 0,22618 \text{ с}.$$

После действия второго импульса $S_2=30$ Нс

$$y_{2,max} = \frac{1}{M\omega} S_1 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1) + \frac{1}{M\omega} S_2 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_2)} \sin \omega(t-t_2) =$$

$$= \frac{1}{100 \cdot 60} [10 \cdot 0,977 + 30 \cdot 0,924] = 0,0054 \text{ м.}$$

В момент времени $t = t_3 + \frac{\pi}{2\omega} = 0,52618$ с.

После действия второго импульса $S_3=20$ Нс

$$y_{2,max} = \frac{1}{M\omega} S_1 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1) +$$

$$+ \frac{1}{M\omega} S_2 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_2)} \sin \omega(t-t_2) + \frac{1}{M\omega} S_3 e^{-\gamma \frac{\omega}{2}(t-t_3)} \sin \omega(t-t_3) =$$

$$= \frac{1}{100 \cdot 60} [10 \cdot 0,206 \cdot 0,154 + 30 \cdot 0,376 \cdot 0,66 + 20 \cdot 0,924 \cdot 1] = 0,0043 \text{ м.}$$

Максимального значения перемещения системы достигают в первом полупериоде колебаний после действия второго импульса

$$y_{max} = y_{2,max} = 0,0054 \text{ м.}$$

Пример 2.5.3. Определить максимальное отклонение массы M системы от действия трех периодических импульсов $S = 20$ Нс, с периодом $T_s = T$, если $M = 50$ кг, $\omega = 30 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 0,1$.

Решение.

Перемещение достигает максимума в первый полупериод колебаний после действия последнего импульса. Применяя формулу (2.20), получим:

$$y_{max} = \frac{S}{M\omega} [e^{-0,1\pi[(3-1)+0,25]} + e^{-0,1\pi[(3-2)+0,25]} + e^{-0,1\pi[(3-3)+0,25]}] =$$

$$= \frac{20}{50 \cdot 30} [0,493 + 0,675 + 0,924] = 0,0279 \text{ м.}$$

Пример 2.5.4. Определить амплитуду (y_{max}) установившихся колебаний, вызванных действием непрерывно повторяющихся импульсов, если $S = 20$ Нс, $T_s = T$, $\omega = 30 \text{ с}^{-1}$, $M = 50$ кг, $\gamma = 0,05$.

Решение.

Применяя формулу (2.22), соответствующую $\gamma = 0,05$, получим:

$$y_{max} = 6,88 \frac{S}{M\omega} = 6,88 \cdot \frac{20}{50 \cdot 30} = 0,091 \text{ м.}$$

Система будет совершать колебания с частотой $\omega = 30 \text{ с}^{-1}$ и амплитудой $0,091$ м.

Отклонение массы в произвольный момент времени t : $y = 0,091 \sin 30t$.

Зная максимальное отклонение массы от действия повторяющихся и

периодических импульсов, нетрудно найти максимальное отклонение любой точки системы, усилия $M_{\max}$, $Q_{\max}$ и $N_{\max}$, напряжения так же, как это делалось в случае действия однократных импульсов.

Пример 2.5.5. Определить максимальный изгибающий момент в сечении 1—1 для системы, показанной на рис. 2.16, от действия трех мгновенных периодических импульсов $S = 20$ Нс, но с периодом $T_s = T$, если $\ell_1 = 2$ м, $\ell_2 = 3$ м, $M = 50$ кг, $EJ = 2 \times 10^6$ Н·м², $\gamma = 0,1$.

Решение.

Частота собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{3EJ}{M \cdot 20}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6}{50 \cdot 20}} = 77,5 \text{ с}^{-1},$$

где $\delta_{11} = \frac{20}{3EJ}$ (эпюра $\bar{M}$ показана на рис. 2.16.б).

Максимальное отклонение массы

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{S}{M\omega} e^{-0.1\pi[(3-1)+0.25]} + e^{-0.1\pi[(3-2)+0.25]} + e^{-0.1\pi[(3-3)+0.25]} = \\ &= \frac{20}{50 \cdot 77,5} [0,493 + 0,675 + 0,924] = 0,011 \text{ м.} \end{aligned}$$

График свободных колебаний системы от действия трех импульсов показан на рис. 2.16 в.

Заменим влияние импульсов эквивалентной силой $P_{\text{ст}}$, вызывающей такое же перемещение, как и три импульса:

$$P_{\text{ст}} \cdot \delta_{11} = y_{\max}$$

$$P_{\text{ст}} = y_{\max} / \delta_{11} = \frac{0,011 \times 3 \times 2 \times 10^6}{20} = 3300 \text{ (Н)} = 3,3 \text{ кН.}$$

Динамический изгибающий момент в сечении 1—1 будет

$$M_{\max} = P_{\text{ст}} \cdot \bar{M}_{\max} = 3,3 \cdot 2 = 6,6 \text{ кН.}$$

Пример 2.5.6. В момент времени $t = 4,0$ Т определить самостоятельно перемещение точки «2» систем, показанных на рис. 2.11, 2.12 от действия трех мгновенных импульсов одинаковой величины $S = 20$ Нс, действовавших в моменты времени $t_1 = 0,8 T$, $t_2 = 2,1 T$, $t_3 = 3,87 T$, если: $\ell_1 = 2$ м, $\ell_2 = 3$ м, $M = 50$ кг, $c = 1 \cdot 10^5$ Н/м, $\gamma = 0,05$.

Пример 2.5.7. По данным примера 2.5.6 определить максимальное отклонение точки «2» систем, показанных на рис. 2.11, 2.12.

Пример 2.5.8. Определить самостоятельно максимальный изгибающий момент в

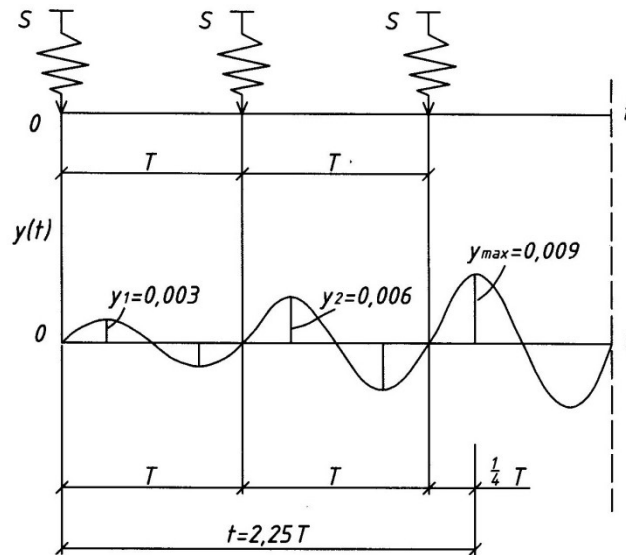
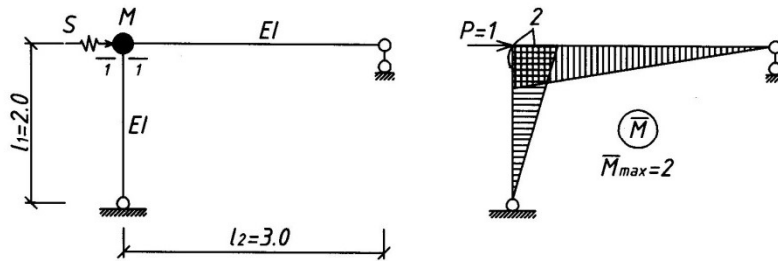


Рис. 2.16

сечении 1—1 систем, показанных на рис. 2.13, 2.14, от действия трех мгновенных периодических импульсов $S = 20 \text{ Нс}$ с периодом $T_s = T$, если: $\ell_1 = 2 \text{ м}$, $\ell_2 = 3 \text{ м}$, $M = 50 \text{ кг}$, $EJ = 2 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$, $\gamma = 0,025$.

Пример 2.5.9. Определить самостоятельно максимальное отклонение массы и максимальное напряжение в подвеске систем, показанных на рис. 2.15. при непрерывном действии периодических мгновенных импульсов $S = 20 \text{ Нс}$ с периодом $T_s = T$, если: $\ell_1 = 2 \text{ м}$, $\ell_2 = 3 \text{ м}$, $M = 50 \text{ кг}$, $E_n = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $A_n = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $\gamma = 0,025$.

2.6. Вынужденные колебания при действии внезапно приложенной постоянной силы

Дифференциальное уравнение движения системы при действии внезапно приложенной силы имеет вид:

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + cy = P \quad (2.23)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение $y = y_0 + y_v$ складывается из общего решения однородного уравнения (2.12), $y_0 = ae^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \alpha)$, выражающего свободные колебания, и частного решения неоднородного уравнения [4]

$$y_v = \frac{P}{M\omega} \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_1(t - \tau) d\tau,$$

выражающего вынужденные колебания.

Если пренебрегать силами сопротивления, полагая $\varepsilon = 0$ и $\omega_1 = \omega$, получим уравнение движения в виде

$$y = a \sin(\omega t + \alpha) + \frac{P}{M\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Используя начальные условия $t = 0, y_0 = \dot{y} = 0$, имеем: $a = \alpha = 0$. Тогда уравнение движения системы при действии внезапно приложенной постоянной силы будет иметь вид:

$$y = \frac{P}{M\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (2.24)$$

Пример 2.6.1. К сосредоточенной массе балки внезапно прикладывается сила P , которая сразу имеет полное значение и неограниченно долго остается на балке

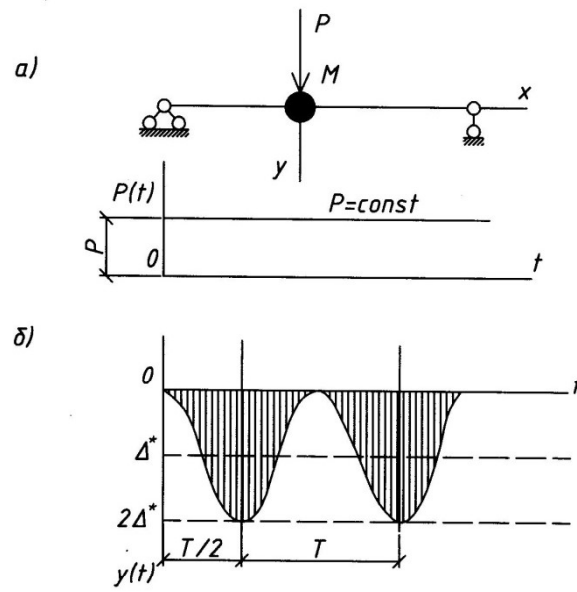


Рис. 2.17

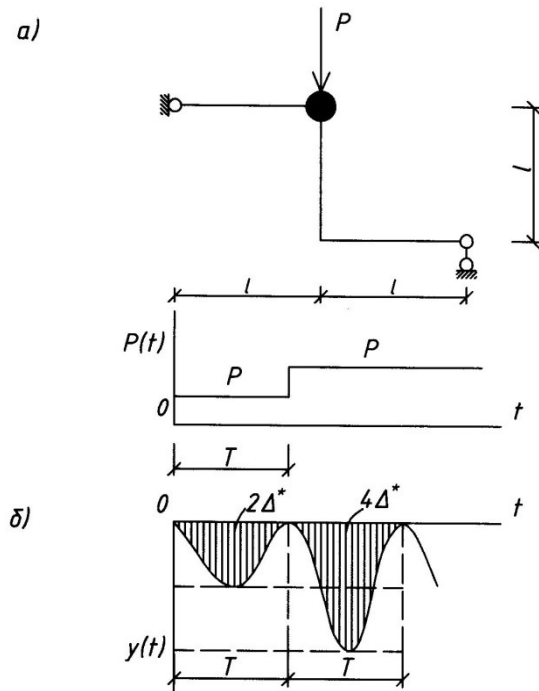


Рис. 2.18

(рис. 2.17, а). Описать колебательный процесс балки.

Решение.

$$y = \frac{P}{M\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{P}{M\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Так как $\frac{P}{M\omega^2} = \Delta^*$ - это статическая деформация от действия силы P , то закон движения будет (рис. 2.17, б):

$$y = \Delta^* (1 - \cos \omega t). \quad (2.25)$$

Система совершает гармонические колебания с круговой частотой ω и амплитудой Δ^* относительно положения статического равновесия. Максимальное отклонение $y_{\max} = 2\Delta^*$. Это указывает на то, что динамическое воздействие внезапно приложенной силы в два раза больше статического.

Пример 2.6.2. К сосредоточенной массе системы внезапно прикладывается сила P , а с истечением времени T добавляется вторая сила P (рис. 2.18, а). Описать колебательный процесс.

Решение.

При $t < T$ колебания будут происходить по закону

$$y_1 = \frac{P}{M\omega^2} (1 - \cos \omega t) = \Delta^* (1 - \cos \omega t).$$

$$\text{При } t = T/2 = \frac{\pi}{\omega}; \quad y_1 = 2\Delta^*$$

При $t > T$ на колебания от первой силы должны наложиться колебания от второй силы, т. е.:

$$y_2 = \frac{P}{M\omega} \left[\int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau + \int_T^t \sin \omega(t - \tau) d\tau \right] = \frac{P}{M\omega^2} [(1 - \cos \omega t) + (1 - \cos \omega t)] = 2\Delta^* (1 - \cos \omega t).$$

$$\text{При } t = \frac{2}{3} T = \frac{3\pi}{\omega}; \quad y_2 = 4\Delta^*.$$

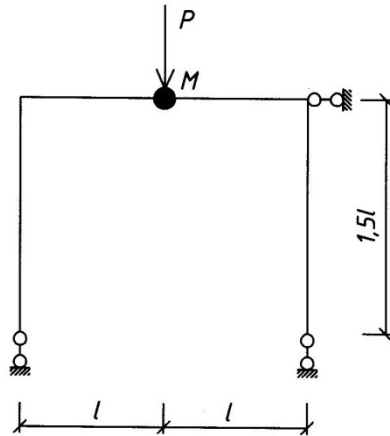
График колебания системы показан на рис 2.18, б.

Пример 2.6.3. К сосредоточенной массе системы внезапно прикладывается сила P , а с истечением времени $T/2$ добавляется еще сила P (рис. 2.19, а). Описать колебательный процесс.

Решение.

При $t < T/2$ колебания будут происходить по закону

a)



б)

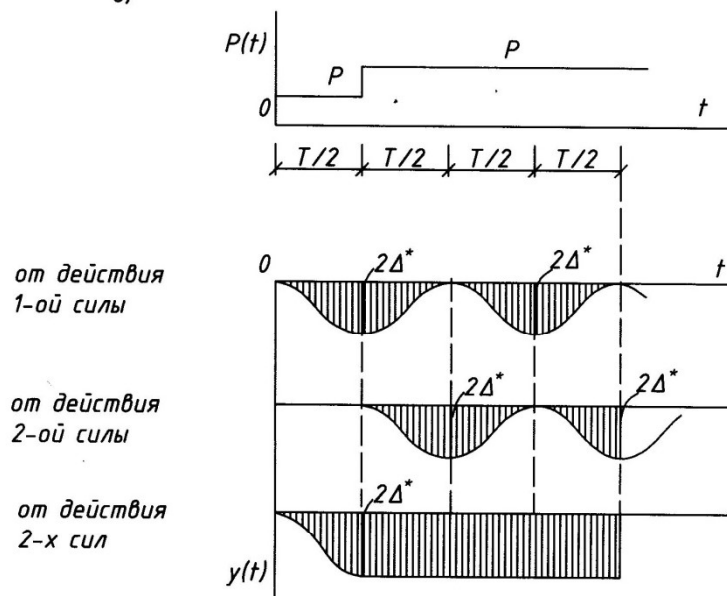


Рис. 2.19

$$y_I = \frac{P}{M\omega} \int_0^t \sin\omega(t-\tau)d\tau = \Delta^* (1 - \cos\omega t).$$

При $t > T/2$ на колебания от первой силы должны наложиться колебания от второй силы, т. е.:

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{P}{M\omega} \left[\int_0^t \sin\omega(t-\tau)d\tau + \int_{T/2}^t \sin\omega(t-\tau)d\tau \right] = \frac{P}{M\omega^2} [1 - \cos\omega t + 1 - (-\cos\omega t)] = \\ &= 2 \frac{P}{M\omega^2} = \Delta^*. \end{aligned}$$

График движения системы показан на рис. 2.19, б. Из этого графика видно, что когда прикладывается вторая сила по истечении времени $t = T/2$, колебания прекращаются.

Пример 2.6.4. Определить самостоятельно закон движения системы (построить график) от действия динамических нагрузок, показанных на рис. 2.20—2.30.

2.7. Вынужденные колебания при действии гармонической нагрузки

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы при действии гармонической нагрузки будет

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + cy = P \sin \theta t. \quad (2.26)$$

Разделив на массу и обозначая, $b/M = 2\varepsilon$, $c/M = \omega^2$, $P/M = P^*$, получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + 2\varepsilon \dot{y} + \omega^2 y = P^* \sin \theta t \quad (2.27)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y = y_0 + y_\varepsilon$ складывается из общего решения однородного уравнения (2.12), выражающего свободные колебания, и частного решения неоднородного уравнения y_ε , выражающего вынужденные колебания, которые будем искать в виде:

$$y_\varepsilon = A \sin(\theta t - \beta),$$

где: A и β —постоянные, подлежащие определению.

Подставляя частное решение в искомое уравнение (2.27), можно определить значение амплитуды « A » вынужденных колебаний и угол сдвига по фазе β между гармонической нагрузкой и вынужденными колебаниями

$$A = \frac{\Delta^*}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2}}, \quad (2.28)$$

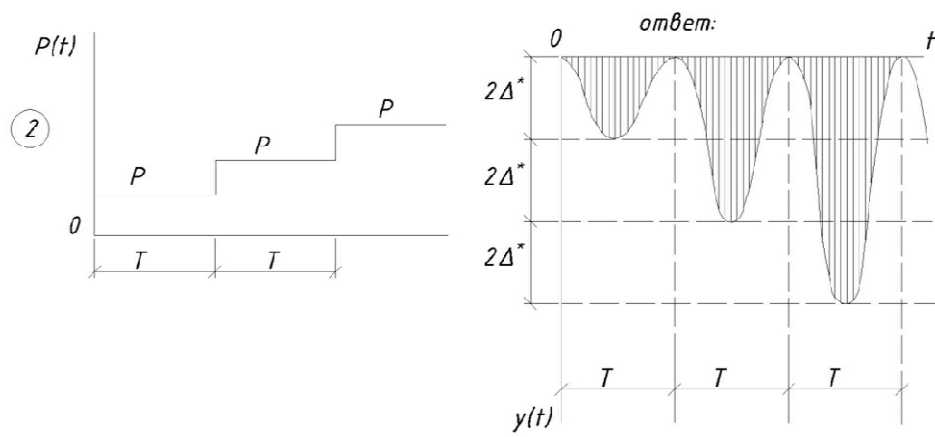
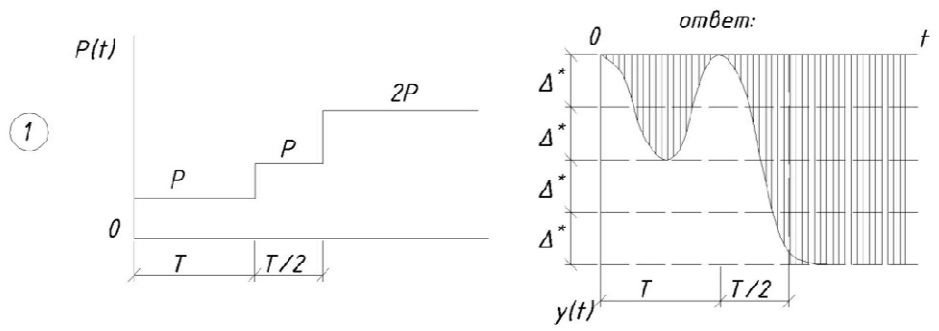
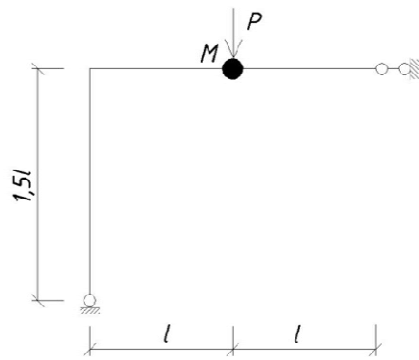


Рис. 2.20

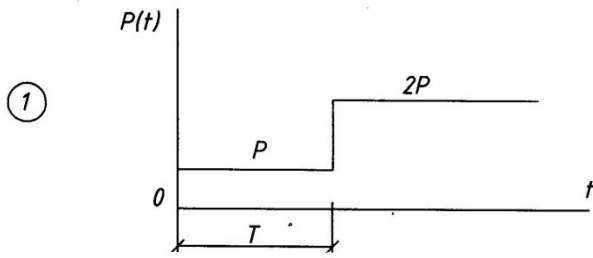
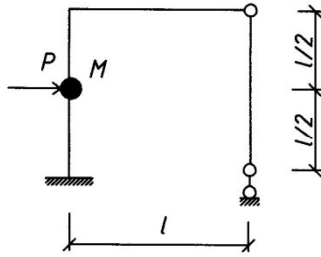


Рис. 2.21

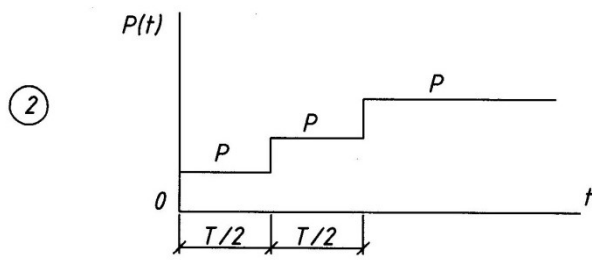


Рис. 2.22

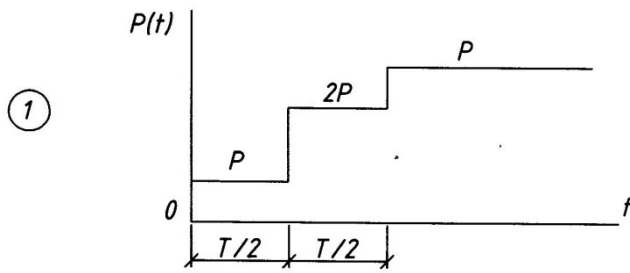
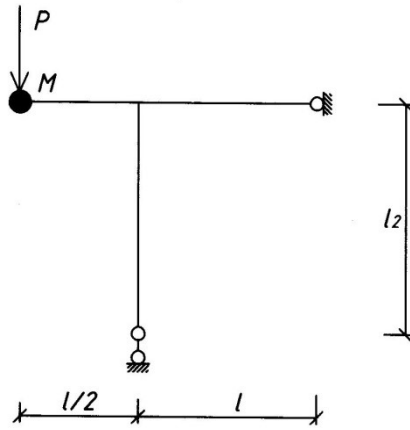


Рис. 2.23

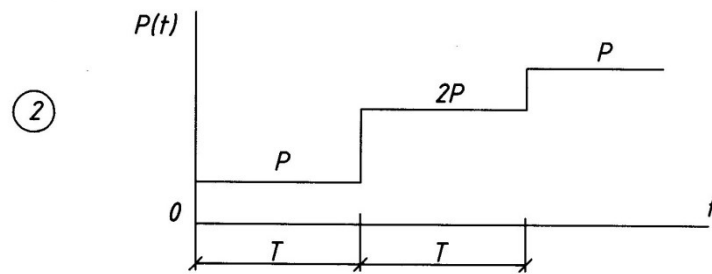


Рис. 2.24

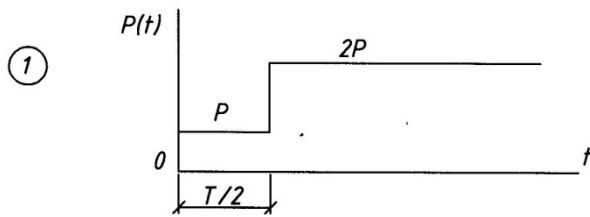
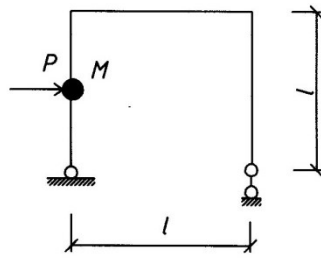


Рис. 2.25

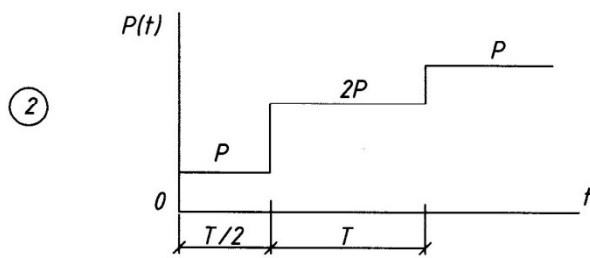


Рис. 2.26

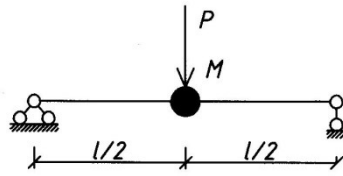


Рис. 2.27

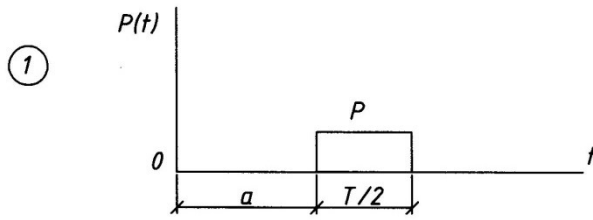


Рис. 2.28

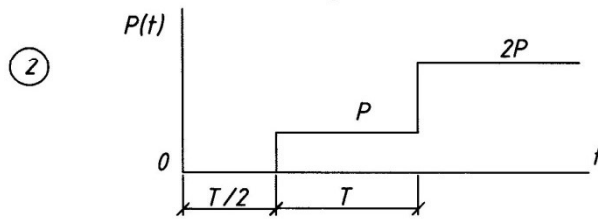


Рис. 2.29

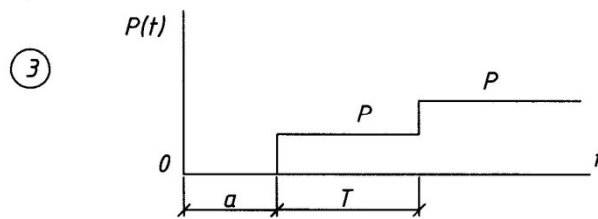


Рис. 2.30

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\gamma \lambda}{1 - \lambda^2}. \quad (2.29)$$

Здесь $\lambda = \theta/\omega$ — отношение частот; $\Delta^* = \frac{P^*}{\omega^2} = \frac{P}{M\omega^2}$ — статистическая деформация от действия амплитудного значения гармонической нагрузки P ; $\gamma = 2\varepsilon/\omega$. Амплитуду вынужденных колебаний можно записать и в другой форме: $A = \Delta^* \mu$,

где:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2}} \quad (2.30)$$

динамический коэффициент.

Если пренебречь силами сопротивления, полагая $\varepsilon = 0$, $\omega_I = \omega$, получим уравнение движения системы в виде

$$y = a \sin(\omega t + \alpha) + A \sin \theta t \quad (2.31)$$

При резонансе $\theta = \omega$ — частота нагрузки совпадает с собственной частотой, динамический коэффициент будет равен

$$\mu = 1/\gamma. \quad (2.32)$$

Силы сопротивления γ учитывают только в зоне резонанса, которая находится в пределах $0,85 < \frac{\theta}{\omega} < 1,15$, а динамический коэффициент определяют по формуле (2.30).

В нерезонансных зонах можно пренебречь влиянием сил сопротивления, используя формулу

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2}}, \quad (2.33)$$

получая при этом несколько завышенное значение динамического коэффициента.

Максимальное отклонение точки системы под действием гармонической нагрузки

$$y_{\max} = A = \Delta^* \mu = y_{cm} \mu = 3 \delta_{ii} \mu. \quad (2.34)$$

Соответственно этому, максимальные перемещения, усилия и напряжения в сечениях конструкции от действия гармонической нагрузки можно представить, как увеличенные в « μ » раз перемещения, усилия и напряжения от статического действия амплитуды P гармонической нагрузки:

$$y_{\max} = y_{\text{ст}} \mu,$$

$$M_{\max} = M_{\text{ст}} \mu,$$

$$Q_{\max} = Q_{\text{ст}} \mu,$$

$$N_{\max} = N_{\text{ст}} \mu,$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{cm} \mu. \quad (2.35)$$

Расчет упругих систем на действие гармонических нагрузок ведут в следующем порядке:

1. Определяют параметры гармонической нагрузки — амплитуду P (1.3) и круговую частоту θ ;
2. Определяют частоту ω собственных колебаний заданной системы;
3. По формуле (2.30) вычисляют динамический коэффициент μ ;
4. По общим правилам строительной механики вычисляют y_{cm} , M_{cm} , Q_{cm} , N_{cm} , σ_{cm} в сечениях от статического действия амплитуды P гармонической нагрузки;
5. По формуле (2.35) определяют максимальные динамические перемещения, усилия и напряжения в сечении конструкции от заданной гармонической нагрузки;
6. Записывают уравнение вынужденных колебаний в исследуемой точке

$$y = y_{max} \sin \theta t.$$

Пример 2.7.1. Определить амплитуду перемещений точки 1 и 2 и наибольший изгибающий момент в сечении над опорой «В» системы, показанной на рис. 2.31 от гармонической нагрузки $P(t) = P \sin \theta t$, если: $\ell_1 = 2$ м, $\ell_2 = 3$ м, $M = 50$ кг, $EJ = 2 \cdot 10^5$ Н м², $\gamma = 0,1$; $P = 500$ Н; $\theta = 18$ с⁻¹.

Решение.

Частота собственных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}} = \sqrt{\frac{3EI}{(l_1 l_2^2 + l_2^3)}} = 16,33 \text{ с}^{-1}.$$

Отношение частот $\lambda = \frac{\theta}{\omega} = 18/16,33 = 11,02$. Колебания происходят в зоне резонанса. Необходимо учитывать силы сопротивления.

Динамический коэффициент:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-11,02^2)^2 + 11,02^2 \cdot 0,1^2}} = 1,45.$$

Перемещение точки 2 от статического действия $P = 500$ Н

$$y_{2,cm} = P \delta_{21} = P \frac{\ell_1^2 \ell_2}{16EJ} = 500 \frac{2^2 \cdot 3}{16 \cdot 2 \cdot 10^5} = 0,0019 \text{ (м)}.$$

Изгибающий момент в сечении над опорой «В» от статического действия P

$$M_{e,cm} = P \cdot \ell_2 = 500 \cdot 3 = 1500 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

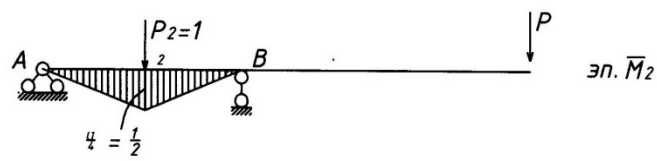
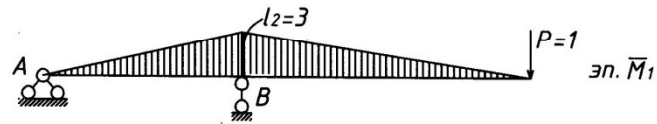
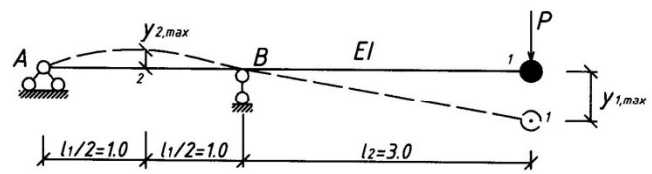


Рис. 2.31

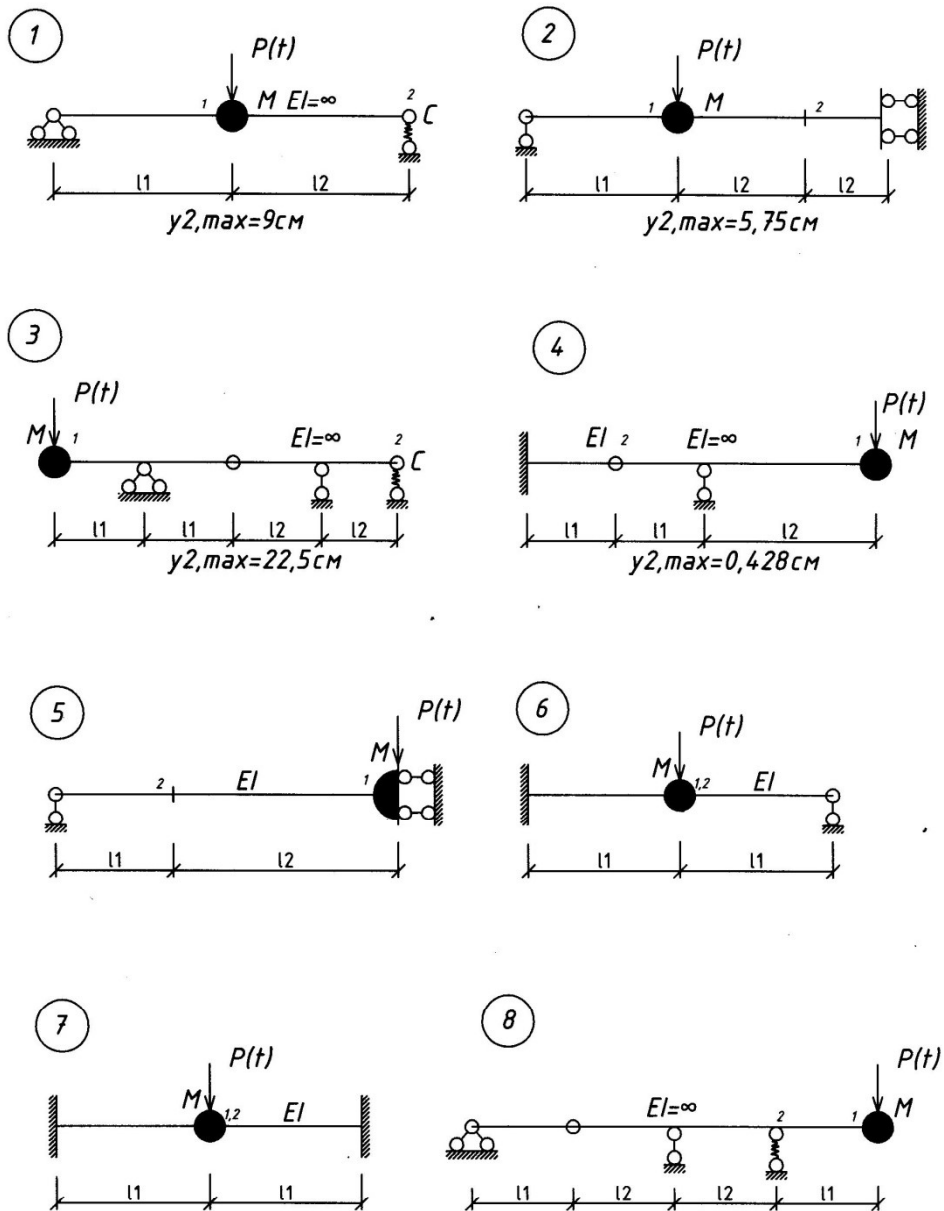


Рис. 2.32

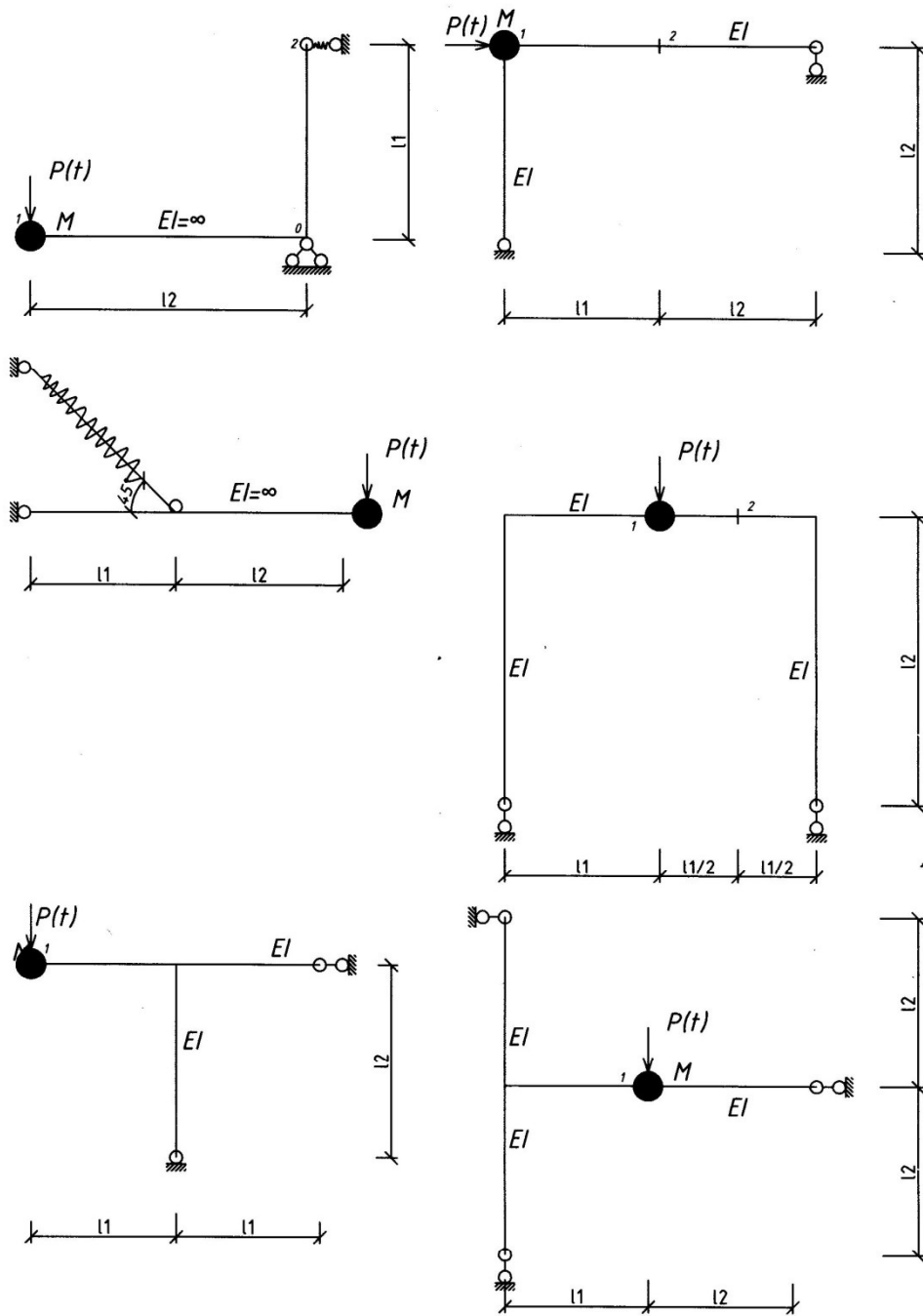


Рис. 2.33

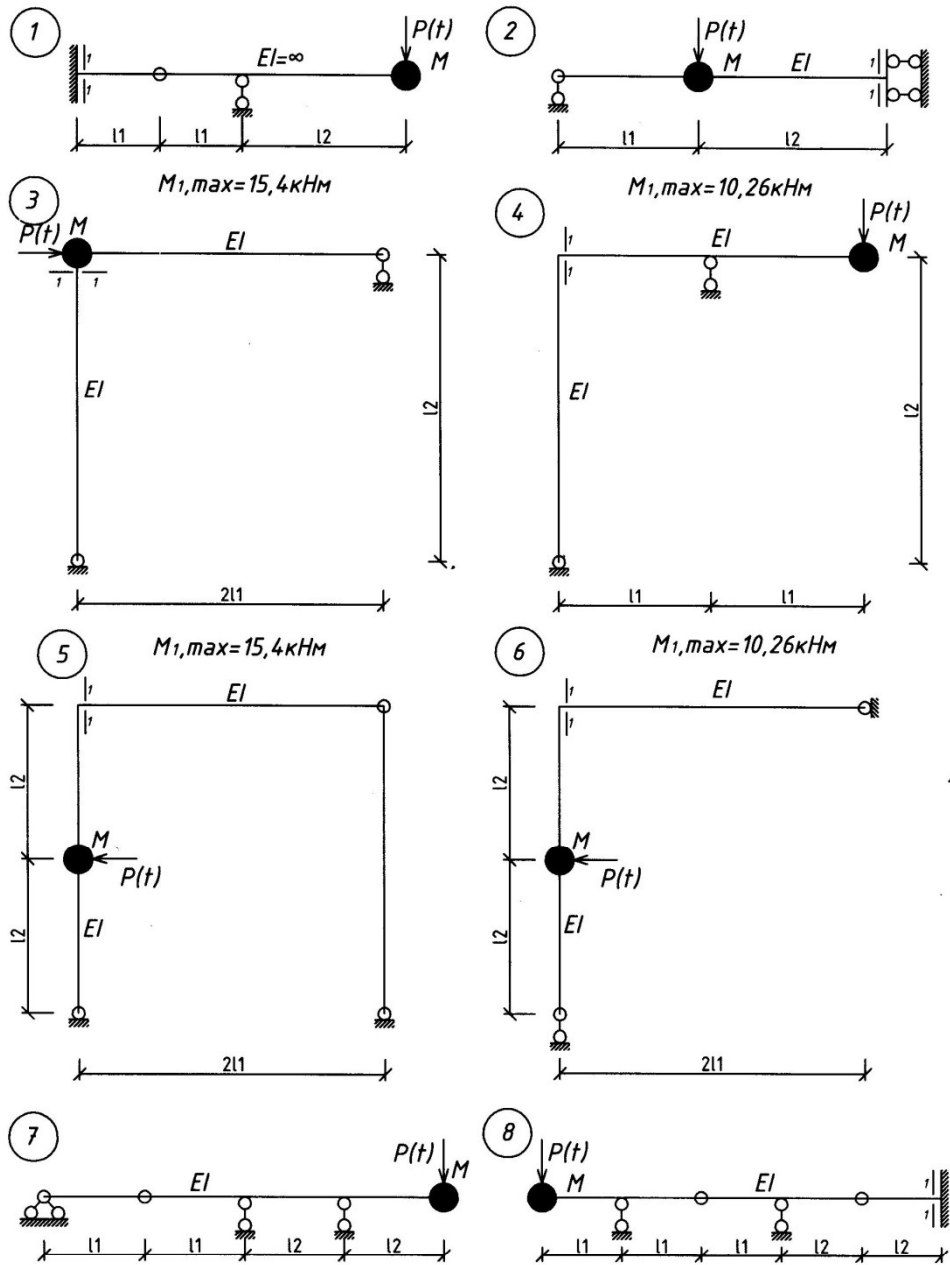


Рис.2.34

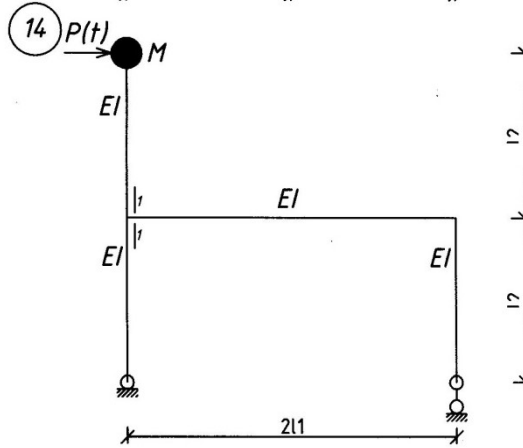
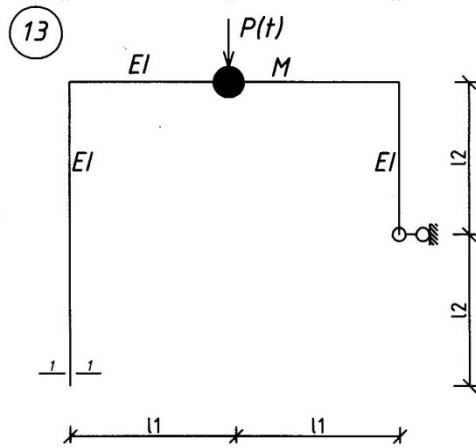
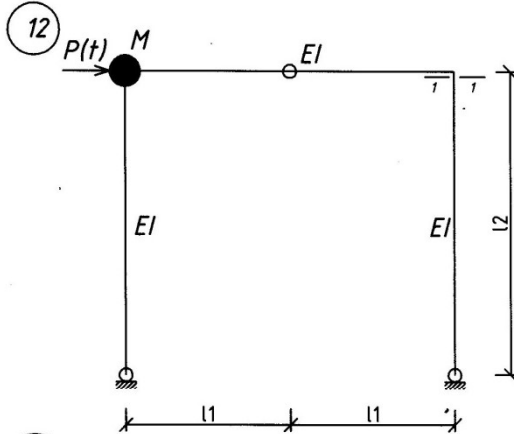
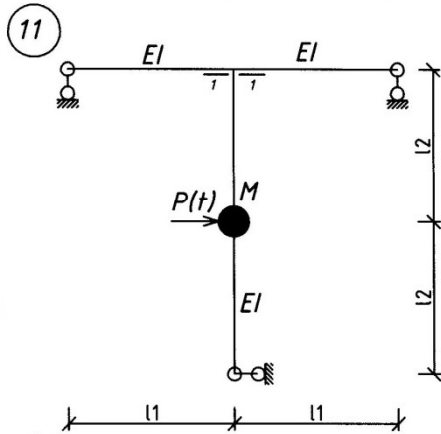
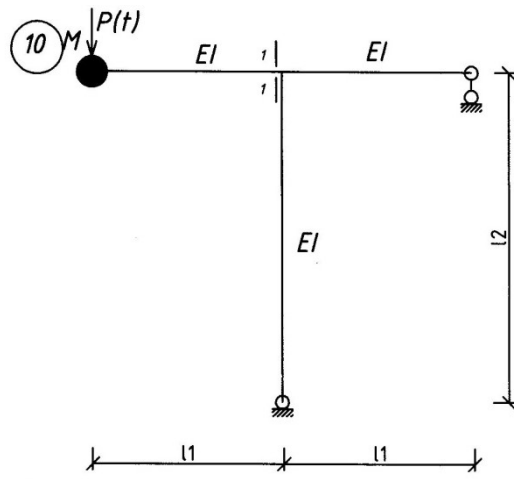
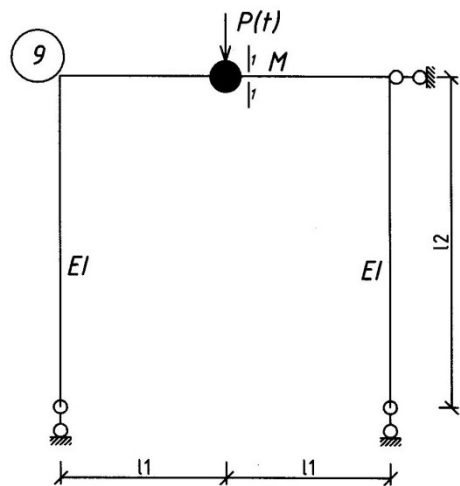


Рис.2.35

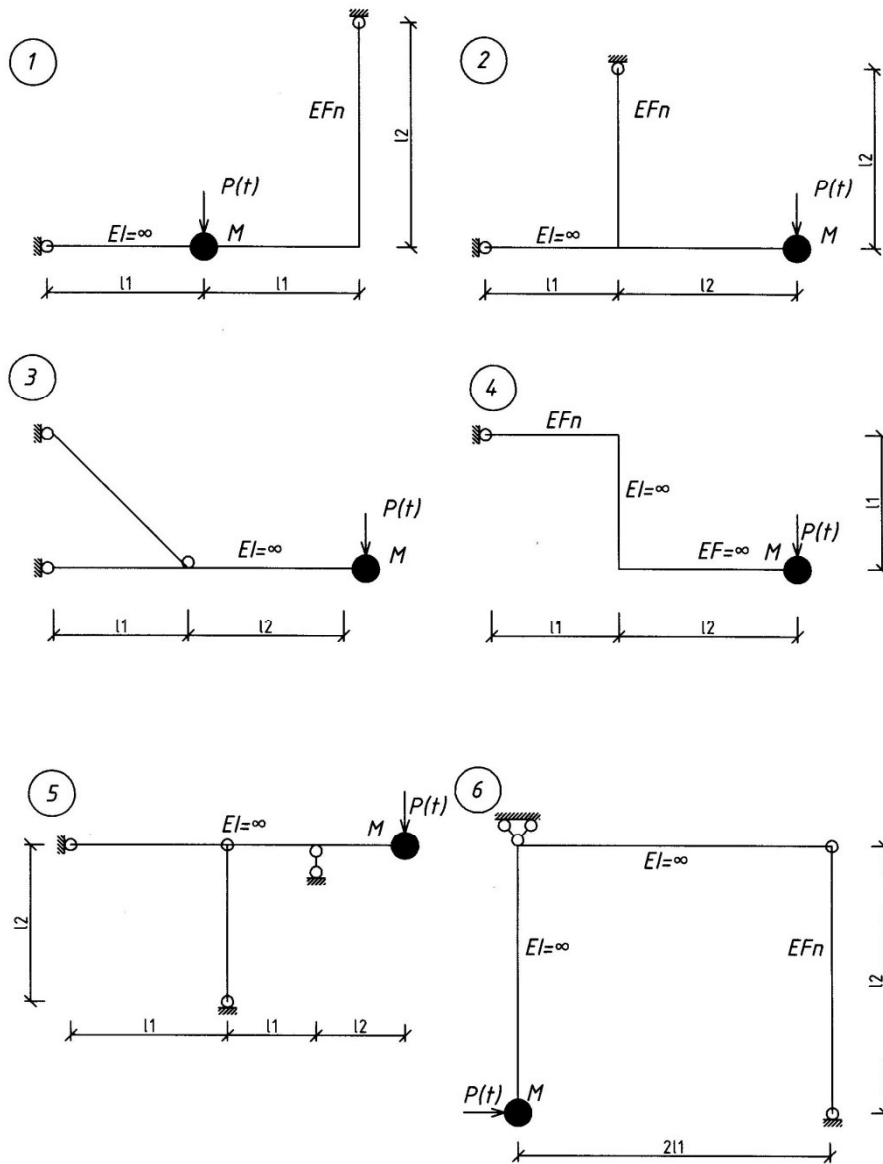


Рис. 2.36

Максимальные динамические перемещения и момент в указанном сечении от действия гармонической нагрузки

$$y_{2,max} = y_{2,ст} \mu = 0,0019 \cdot 1,45 = 0,0028 \text{ м};$$

$$M_{B,max} = M_{B,ст} \mu = 1500 \cdot 1,45 = 2175 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Пример 2.7.2. Вычислить самостоятельно динамическое перемещение точек 2 систем, показанных на рис 2.32, 2.33 от действия гармонической нагрузки, если: $\ell_1 = 2 \text{ м}$, $\ell_2 = 3 \text{ м}$; $M = 50 \text{ кг}$; $c = 1 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$; $\gamma = 0,1$; $P = 1 \text{ кН}$; $\theta = 0,9\omega$; $EJ = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Н м}^2$.

Пример 2.7.3. Вычислить самостоятельно динамический изгибающий момент в сечении 1—1 систем, показанных на рис. 2.34, 2.35 от действия гармонической нагрузки $P(t) = P \sin \theta t$, если: $\ell_1 = 2 \text{ м}$, $\ell_2 = 3 \text{ м}$; $M = 10 \text{ кг}$; $EJ = 2 \cdot 10^6 \text{ Н м}^2$; $\gamma = 0,05$, $P = 1 \text{ кН}$; $\theta = 0,9\omega$.

Пример 2.7.4. Вычислить самостоятельно динамическое напряжение σ_{max} в подвеске систем, показанных на рис. 2.36, от действия гармонической нагрузки $P(t) = P \sin \theta t$, если: $\ell_1 = 2 \text{ м}$, $\ell_2 = 3 \text{ м}$; $M = 100 \text{ кг}$; $E_n = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $A_n = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $\gamma = 0,025$, $P = 1 \text{ кН}$; $\theta = 0,9\omega$.

3. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

3.1. Частота собственных колебаний

Свободные колебания систем вызываются начальными возмущениями. Они происходят только под действием внутренних сил. Исследуя свободные колебания, определяют частоты и формы собственных колебаний, необходимые для динамического расчета.

Собственными называются свободные колебания по одной из собственных форм. Собственная форма — это форма свободных колебаний системы, совершающихся по гармоническому закону с одной и той же частотой. Дифференциальные уравнения свободных колебаний системы с n степенями свободы имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} M_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + \dots + M_n \delta_{1n} \ddot{y}_n + y_1 &= 0; \\ M_1 \delta_{i1} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{i2} \ddot{y}_2 + \dots + M_n \delta_{in} \ddot{y}_n + y_i &= 0; \\ M_1 \delta_{n1} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{n2} \ddot{y}_2 + \dots + M_n \delta_{nn} \ddot{y}_n + y_n &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

с начальными условиями при $t = 0$, y_{0i} , $\dot{y}_{0i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Решение системы

уравнений (3.1) представим в виде гармонических колебаний

$$y_i = a_i \sin(\omega t + \alpha), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

с амплитудой a_i собственной круговой частотой ω и начальной фазой α . Подставляя решение (3.2) в (3.1), получим систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (M_1 \delta_{11} - \lambda) a_1 + M_2 \delta_{12} a_2 + \dots + M_n \delta_{1n} a_n &= 0; \\ M_1 \delta_{i1} a_1 + M_2 \delta_{i2} a_2 + \dots + M_n \delta_{in} a_n &= 0; \\ M_1 \delta_{n1} a_1 + M_2 \delta_{n2} a_2 + \dots + (M_n \delta_{nn} - \lambda) a_n &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\lambda = 1/\omega^2$ — величина, обратная квадрату круговой собственной частоты колебаний. Система (3.3) допускает два вида решений: Первое — нулевое, когда $a_i = 0$, то есть движение отсутствует; второе — отличное от нуля решение, которое возможно в том случае, когда определитель системы уравнений равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (M_1 \delta_{11} - \lambda) & M_2 \delta_{12} & \dots & M_n \delta_{1n} \\ M_1 \delta_{i1} & M_2 \delta_{i2} & \dots & M_n \delta_{in} \\ M_1 \delta_{n1} & M_2 \delta_{n2} & \dots & (M_n \delta_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4), называемое уравнением частот или вековым уравнением, позволяет определить собственные частоты. Для этого, раскрывая определитель (3.4) и получая уравнение n -й степени относительно λ , вычисляют его корни.

Таким образом, число корней векового уравнения (3.4) равно числу степеней свободы системы. Их располагают в убывающем порядке

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n, \quad (3.5)$$

что соответствует ряду значений собственных частот

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n, \quad (3.6)$$

который называется спектром собственных частот (рис. 3.1). Каждой частоте ω_k соответствует собственные колебание

$$y_{ik} = a_{ik} \sin(\omega_k t + \alpha_k), \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (3.1) будет состоять из суммы собственных колебаний

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sin(\omega_k t + \alpha_k). \quad (3.8)$$

Для формирования уравнения частот (3.4) необходимо вычислить удельные

перемещения δ_{ij} по известным методам строительной механики, построив предварительно эпюры изгибающих моментов от действия единичных сил $P_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), приложенных по направлению соответствующих координат y_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

В частности, для системы с двумя степенями свободы $n = 2$ определитель второго порядка раскрывается по формуле:

$$(M_1 \delta_{11} - \lambda)(M_2 \delta_{22} - \lambda) - M_1 M_2 \delta_{12}^2 = 0 \quad (3.9)$$

Корни этого квадратного уравнения будут:

$$\lambda_{l,2} = \frac{1}{2}[(M_l \delta_{ll} + M_2 \delta_{22}) \pm \sqrt{(M_1 \delta_{11} - M_2 \delta_{22})^2 + 4M_1 M_2 \delta_{12}^2}] \quad , \quad (3.10)$$

а частоты $\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{1,2}}}$.

Общее решение (3.8) системы уравнений (3.1) в этом случае будет:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ y_2 &= a_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

и представляет собой сложный процесс движения по каждому направлению y_1 и y_2 .

3.2. Формы собственных колебаний

Общее решение (3.8) содержит n^2 неизвестных амплитуд a_{lk} и n начальных фаз, то есть $(n^2 + n)$ произвольных постоянных, тогда как число начальных условий y_{oi} , $\dot{y}_{oi}$ при $t = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) равно только $2n$. Необходимо уменьшение числа произвольных постоянных. Поскольку из уравнений (3.3) непосредственно определить амплитуды колебаний не удастся, выражают отношения амплитуд. Их называют коэффициентами распределения или коэффициентами форм колебаний φ_{ik} и определяют на основании (3.3) из решений системы уравнений:

$$\begin{aligned} (M_1 \delta_{11} - \lambda) \varphi_{1k} + M_2 \delta_{12} \varphi_{2k} + \dots + M_n \delta_{1n} \varphi_{nk} &= 0 \\ M_1 \delta_{i1} \varphi_{1k} + M_2 \delta_{i2} \varphi_{2k} + \dots + M_n \delta_{in} \varphi_{nk} &= 0 \\ M_1 \delta_{n1} \varphi_{1k} + M_2 \delta_{n2} \varphi_{2k} + \dots + (M_n \delta_{nn} - \lambda) \varphi_{nk} &= 0, \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для определенности, обычно полагают $\varphi_{1k} = 1$. Таким образом, коэффициенты формы являются относительными амплитудами свободных колебаний системы

$$\varphi_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{1k}}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.13)$$

и характеризуют собственные формы колебаний, выражая все координаты системы через одну произвольную, определяющую колебания в принятом направлении y_1 . Общее решение системы (3.1) из (3.8) может быть представлено с учетом (3.13) в виде:

$$y_i = \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \cdot a_{1k} \sin(\omega_k t + \alpha_k). \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.14)$$

Свободные колебания происходят по сложному закону и состоят из суммы гармонических собственных колебаний системы. Собственные частоты ω_k и коэффициенты φ_{ik} не зависят от начальных условий и являются динамическими характеристиками системы с n степенями свободы. Собственные формы колебаний обладают свойством ортогональности, то есть удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^n M_i \varphi_{ik} \varphi_{ij} = 0. \quad (k \neq j) \quad (3.15)$$

В частности, для системы с двумя степенями свободы уравнения (3.12) будут

$$\begin{aligned} (M_1 \delta_{11} - \lambda_k) + M_2 \delta_{12} \varphi_{2k} &= 0 \\ M_1 \delta_{21} + (M_2 \delta_{22} - \lambda_k) \varphi_{2k} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Коэффициенты форм колебаний определяются формулами

$$\varphi_{2k} = \frac{a_{2k}}{a_{1k}} = -\frac{M_1 \delta_{11} - \lambda_k}{M_2 \delta_{12}} \quad \text{или} \quad \varphi_{2k} = -\frac{M_1 \delta_{21}}{M_2 \delta_{22} - \lambda_k}. \quad (3.17)$$

Условие ортогональности (3.15) имеет вид

$$M_1 \varphi_{11} \varphi_{12} + M_2 \varphi_{21} \varphi_{22} = 0 \quad (3.18)$$

и должно выполняться с погрешностью не более 3%. Общее решение для этого случая (3.11) с учетом $\varphi_{11} = \varphi_{12} = 1$, будет:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ y_2 &= a_{21} \varphi_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{22} \varphi_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Коэффициенты форм колебаний позволяют построить собственные формы колебаний. При их построении пренебрегают продольными деформациями стержней по сравнению с изгибными деформациями и угловыми деформациями жестких узлов. Вычислив коэффициенты форм (3.17), выражают амплитуды колебаний для каждой собственной формы

$$a_{ik} = \varphi_{ik} \cdot a_{1k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.20)$$

и выполняют построение форм колебаний.

За масштаб обычно принимают амплитуду колебаний в направлении координаты y_1 , то есть a_{11} и a_{12} , по (3.20) выражают a_{21} и a_{22} , откладывая их по оси y_2 . Зная амплитуды перемещений, производят построение формы колебаний всей системы с учетом типа ее опорных закреплений и условий сопряжения стержней в узлах.

3.3. Примеры определения частот и форм собственных колебаний

Пример 3.3.1. Определить частоты, коэффициенты форм собственных колебаний и графически построить формы колебаний в системе с двумя степенями свободы (рис. 3.2).

Решение.

1. Для определения движения системы вводим координатные оси y_1 и y_2 .
2. Строим эпюры изгибающих моментов от действия сил $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, приложенных по направлению координат y_1 и y_2 (рис. 3.3).
3. Вычисляем удельные перемещения

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4,67}{EI} \text{ м/кН},$$

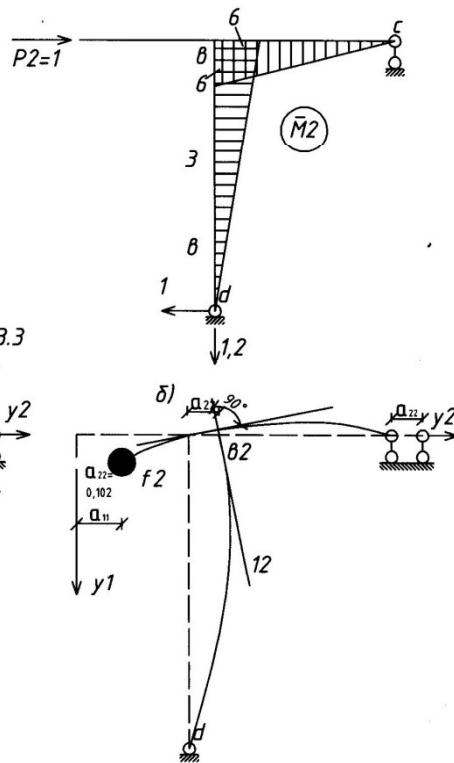
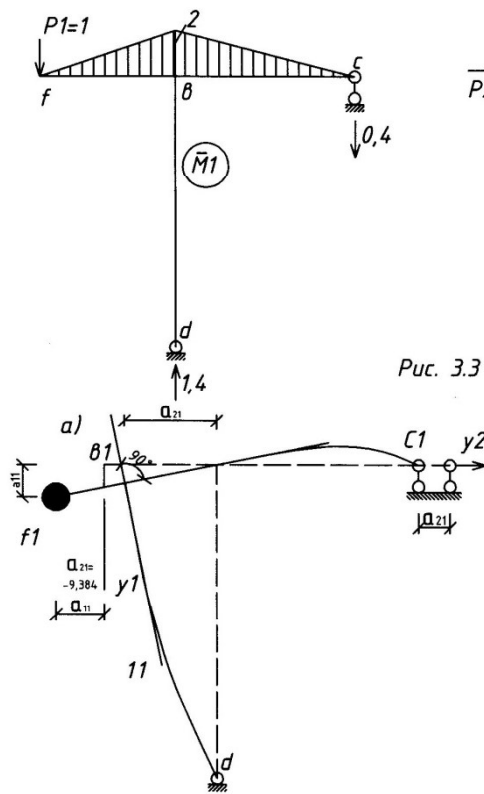
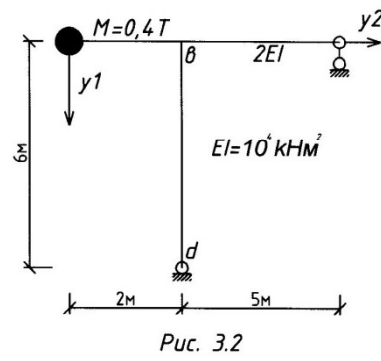
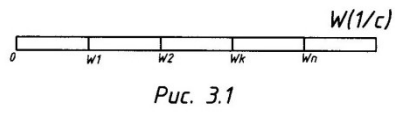
$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{102}{EI} \text{ м/кН},$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{10}{EI} \text{ м/кН}.$$

4. Определяем частоты и периоды собственных колебаний (3.9), (3.10)

$$\begin{vmatrix} \left(0,4 \cdot \frac{4,67}{EI} - \lambda\right) & 0,4 \left(-\frac{10}{EI}\right) \\ 0,4 \left(-\frac{10}{EI}\right) & \left(0,4 \cdot \frac{102}{EI} - \lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[0,4 \frac{4,67}{EI} + 0,4 \frac{102}{EI} \pm \sqrt{\left(0,4 \frac{4,67}{EI} - 0,4 \frac{102}{EI}\right)^2 + 4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \left(-\frac{10}{EI}\right)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{EI} (921,335 \pm 19,872); \end{aligned}$$



$$\lambda_1 = \frac{41,207}{EJ}, \quad \lambda_2 = \frac{1,463}{EJ}.$$

Проверка решения: $\lambda_1 + \lambda_2 = M_1 \delta_{11} + M_2 \delta_{22}$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{42,67}{EI}, \quad M_1 \delta_{11} + M_2 \delta_{22} = (1,87 + 4,08)/EI = 42,67/EI.$$

Собственные частоты и периоды колебаний равны:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{EJ}{41,207}} = 15,6 \text{ рад/с}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,403 \text{ с},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{EJ}{1,463}} = 82,7 \text{ рад/с}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,076 \text{ с}.$$

5. Определяем коэффициенты форм собственных колебаний (3.13), (3.17):

- для основного тона:

$$\varphi_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1; \quad \varphi_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = - \frac{0,4 \cdot \frac{4,67}{EI} - \frac{41,207}{EI}}{0,4 \cdot \left(-\frac{10}{EI}\right)} = -9,384,$$

- для второго тона

$$\varphi_{12} = \frac{a_{12}}{a_{12}} = 1; \quad \varphi_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = - \frac{0,4 \cdot \frac{4,67}{EI} - \frac{1,463}{EI}}{0,4 \cdot \left(-\frac{10}{EI}\right)} = 0,102.$$

Проверяем условие ортогональности (3.18):

$$0,4 \cdot 1 \cdot 1 + 0,4 \cdot (-9,384) \cdot 0,102 = -0,001. \text{ Погрешность } 0,001/0,4 = 0,25\% \text{ незначительна.}$$

6. Строим графически собственные формы колебаний (рис. 3.4).

Построим первую форму. Для этого, откладывая по оси y_1 величину $a_{11} = 1$ и по оси y_2 величину $a_{21} = (-9,384 \cdot a_{11})$, определяем точку « f_1 », куда переместилась масса M (рис. 3.4, а). Все точки ригеля « fbc » получают горизонтальное перемещение, равное $a_{21} = -9,384$. Таким образом, жесткий узел рамы « v » переместится в точку « v_1 » (стойка принимается несжимаемой), а правая опора в точку « c_1 ». Соединяя плавной линией точки « f_1 », « v_1 » и « c_1 » строим форму колебаний ригеля рамы. Проводим касательную к деформированному ригелю в точке « v_1 » и откладываем угол 90° , так как узлы рамы являются жесткими. Проводим касательную « $v_1 l_1$ » к деформированной стойке. Соединяя с неподвижной точкой « d », строим форму колебаний стойки таким образом, чтобы она в узле рамы имела касательную « $v_1 l_1$ ».

Аналогично строим вторую форму. Откладывая по оси y_1 величину $a_{12} = 1$ и по оси y_2 величину $a_{22} = (0,102 \cdot a_{12})$, определяем точку « f_2 » куда переместилась масса M (рис. 3.4, б). Все точки ригеля « fbc » получают горизонтальное перемещение $a_{22} =$

0,102. Таким образом, жесткий узел «в» переместится в точку «в₂», а правая опора — в точку «с₂». Соединяя плавной линией точки «f₂», «в₂» и «с₂», строим форму колебаний ригеля рамы. Проводим касательную к деформированному ригелю в точке «в₂» и откладываем угол 90°. Проводим касательную «в₂l₂» к деформированной стойке. Соединяя с точкой «d», строим форму колебаний стойки таким образом, чтобы она в узле рамы «в₂» имела касательную «в₂l₂».

7. Составляем уравнения движения системы (3.19)

$$y_1 = a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$y_2 = -9,384 a_{21} \sin(\omega_1 + \alpha_1) + 0,102 a_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

8. Определим амплитуды a_{11} , a_{12} и начальные фазы α_1 , α_2 из начальных условий:

$$t_0=0, y_{01}, y_{02}, \dot{y}_{01}, \dot{y}_{02}.$$

$$\dot{y}_1 = a_{11} \omega_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{12} \omega_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$\dot{y}_{02} = -9,384 a_{11} \omega_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + 0,102 a_{12} \omega_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$y_{01} = a_{11} \sin \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_2;$$

$$y_{02} = -9,384 a_{11} \sin \alpha_1 + 0,102 a_{12} \sin \alpha_2;$$

$$\dot{y}_{01} = a_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + a_{12} \omega_2 \cos \alpha_2;$$

$$\dot{y}_{02} = -9,384 a_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + 0,102 a_{12} \omega_2 \cos \alpha_2.$$

Решая, определяем:

$$a_{11} = \sqrt{\left(\frac{0,102 y_{01} - y_{02}}{9,486}\right)^2 + \left(\frac{0,102 \dot{y}_{01} - \dot{y}_{02}}{9,486 \omega_1}\right)^2}; \quad a_{12} = \sqrt{\left(\frac{9,384 y_{01} - y_{02}}{9,486}\right)^2 + \left(\frac{9,384 \dot{y}_{01} - \dot{y}_{02}}{9,486 \omega_2}\right)^2}$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{0,102 y_{01} - y_{02}}{0,102 \dot{y}_{01} - \dot{y}_{02}} \omega_1; \quad \alpha_2 = \arctg \frac{9,384 y_{01} - y_{02}}{9,384 \dot{y}_{01} - \dot{y}_{02}} \omega_2.$$

Пример 3.3.2. Определить частоты, коэффициенты форм собственных колебаний в раме (рис. 3.5).

Решение.

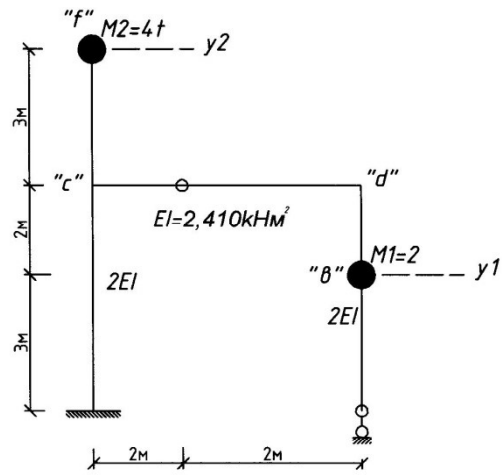
1. В системе с двумя степенями свободы для определения движения вводим координатные оси y_1 и y_2 .

2. Строим эпюры изгибающих моментов от действия сил $P_1 = I$, $P_2 = I$, приложенных по направлению координат y_1 и y_2 (рис. 3.6).

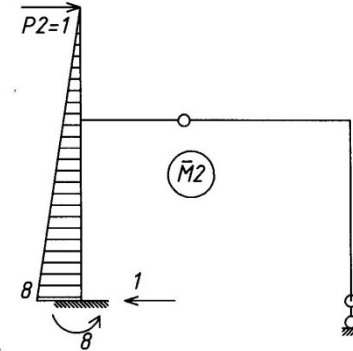
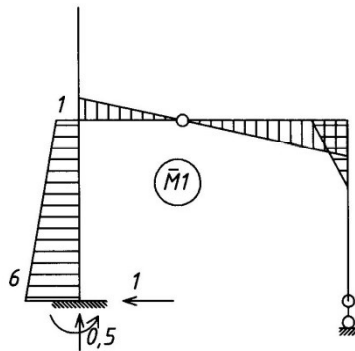
3. Вычисляем удельные перемещения

$$\delta_{11} = \frac{259}{3EI} \text{ м/кН}, \quad \delta_{22} = \frac{512}{3EI} \text{ м/кН}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{320}{3EI} \text{ м/кН}.$$

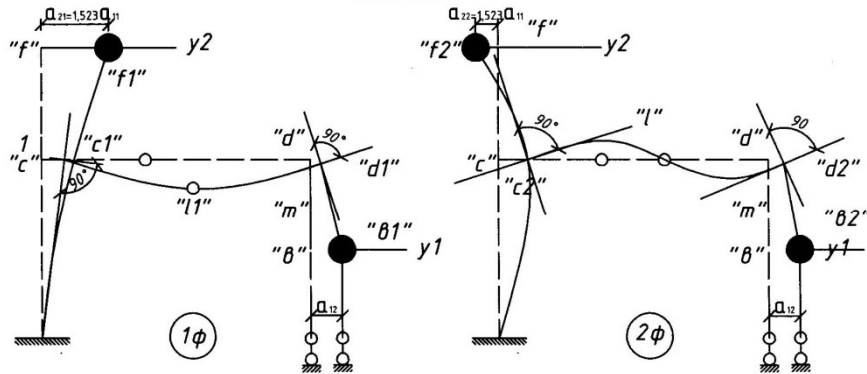
4. Определяем частоты и периоды собственных колебаний (3.9), (3.10):



Puc. 3.5



Puc. 3.6



Puc. 3.7

$$\begin{vmatrix} \left(2 \cdot \frac{259}{3EI} - \lambda\right) & 4 \left(\frac{320}{3EI}\right) \\ 2 \left(\frac{320}{3EI}\right) & \left(4 \cdot \frac{512}{3EI} - \lambda\right) \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda_1 = \frac{822,672}{EJ}, \quad \lambda_2 = \frac{32,64}{EJ}.$$

Проверка решения $\lambda_1 + \lambda_2 = M_1 \delta_{11} + M_2 \delta_{22}$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{855,312}{EJ}, \quad M_1 \delta_{11} + M_2 \delta_{22} = (259 + 512)/3EI = 855,33/EJ.$$

Собственные частоты и периоды колебаний равны

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{EI}{822,672}} = 17,08 \text{ рад/с}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,37 \text{ с},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{EI}{32,64}} = 85,7 \text{ рад/с}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,073 \text{ с}.$$

5. Определяем коэффициенты форм собственных колебаний (3.13), (3.17):

- для основного тона

$$\varphi_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1; \quad \varphi_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = - \frac{2 \cdot \frac{259}{3EI} \cdot \frac{822,672}{EI}}{4 \left(\frac{320}{3EI}\right)} = 1,523,$$

- для второго тона

$$\varphi_{12} = \frac{a_{12}}{a_{12}} = 1; \quad \varphi_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = - \frac{2 \cdot \frac{259}{3EI} \cdot \frac{32,64}{EI}}{4 \left(\frac{320}{3EI}\right)} = -0,328.$$

Проверяем условие ортогональности (3.18)

$2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1,523 \cdot (-0,328) = 0,0006$. Погрешность $0,0006/2 = 0,032\%$ незначительна.

6. Строим собственные формы колебаний (рис. 3.7).

Построим первую форму. Для этого, откладывая по оси y_1 величину $a_{11} = 1$ и по оси y_2 величину $a_{21} = 1,523a_{11}$, определяем точки « v_1 » и « f_1 », куда переместились массы M_1 и M_2 в первой форме. В результате такого смещения все точки ригеля получают горизонтальные смещения вправо, а жесткие узлы «с» и « d » угловые перемещения. Поскольку эти узлы являются жесткими, проводим, перпендикуляры « $c_1 \ell_1$ » и « $d_1 m_1$ » к касательным для деформированных стоек в точках « c_1 » и « d_1 » между узлами « c_1 » и « d_1 », проводим плавную кривую таким образом, чтобы она в

этих узлах имела касательные « $c_1 \ell_1$ » и $d_1 m_1$ ». Аналогично выполняется построение второй формы колебаний (рис. 3.7).

7. Составляем уравнения движения системы (3.19)

$$y_1 = a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$y_2 = 1,523a_{21} \sin(\omega_1 + \alpha_1) - 0,328a_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Пример 3.3.3. Определить частоты, коэффициенты форм собственных колебаний и построить формы колебаний в системах с двумя степенями свободы (рис. 3.8, 3.9).

Результаты решения приведены на рисунках.

Пример 3.3.4. Определить самостоятельно частоты, коэффициенты форм собственных колебаний и построить формы колебаний в рамах (рис. 3.10).

3.4. Вынужденные колебания при действии гармонической нагрузки

Расчет на динамические нагрузки осуществляется с целью определения усилий и деформаций в сечениях сооружения для последующей оценки прочности и возможности выполнения нормального технологического процесса. При частотной характеристики θ гармонической нагрузки $P(t) = P \sin \theta t$, отличающейся от одной из собственных частот колебаний ω_k (3.6) ($k = 1, 2, \dots, n$) условием

$$0,85 < \theta/\omega_k < 1,15, \quad (3.21)$$

силами сопротивления, обусловленными неидеальными упругими свойствами материала, можно пренебречь.

Дифференциальные уравнения движения системы с « n » степенями свободы при действии гармонической нагрузки $P_i(t) = P_i \sin \theta t$, ($i = 1, 2, \dots, n$) с одинаковой частотой θ и фазой без учета сил сопротивления имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} M_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + \dots + M_n \delta_{1n} \ddot{y}_n + y_1 &= \Delta_{1p}^* \sin \theta t; \\ M_1 \delta_{i1} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{i2} \ddot{y}_2 + \dots + M_n \delta_{in} \ddot{y}_n + y_i &= \Delta_{ip}^* \sin \theta t; \\ M_1 \delta_{n1} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{n2} \ddot{y}_2 + \dots + M_n \delta_{nn} \ddot{y}_n + y_n &= \Delta_{np}^* \sin \theta t, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $\Delta_{ip}^* = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j$ — перемещение в направлении оси y_i , вызванное статическим действием сил, равных амплитудным значениям гармонической нагрузки, с

начальными условиями y_{0i} , y'_{0i} ($i=1, 2, \dots, n$) при $t=0$. Решением системы (3.22)

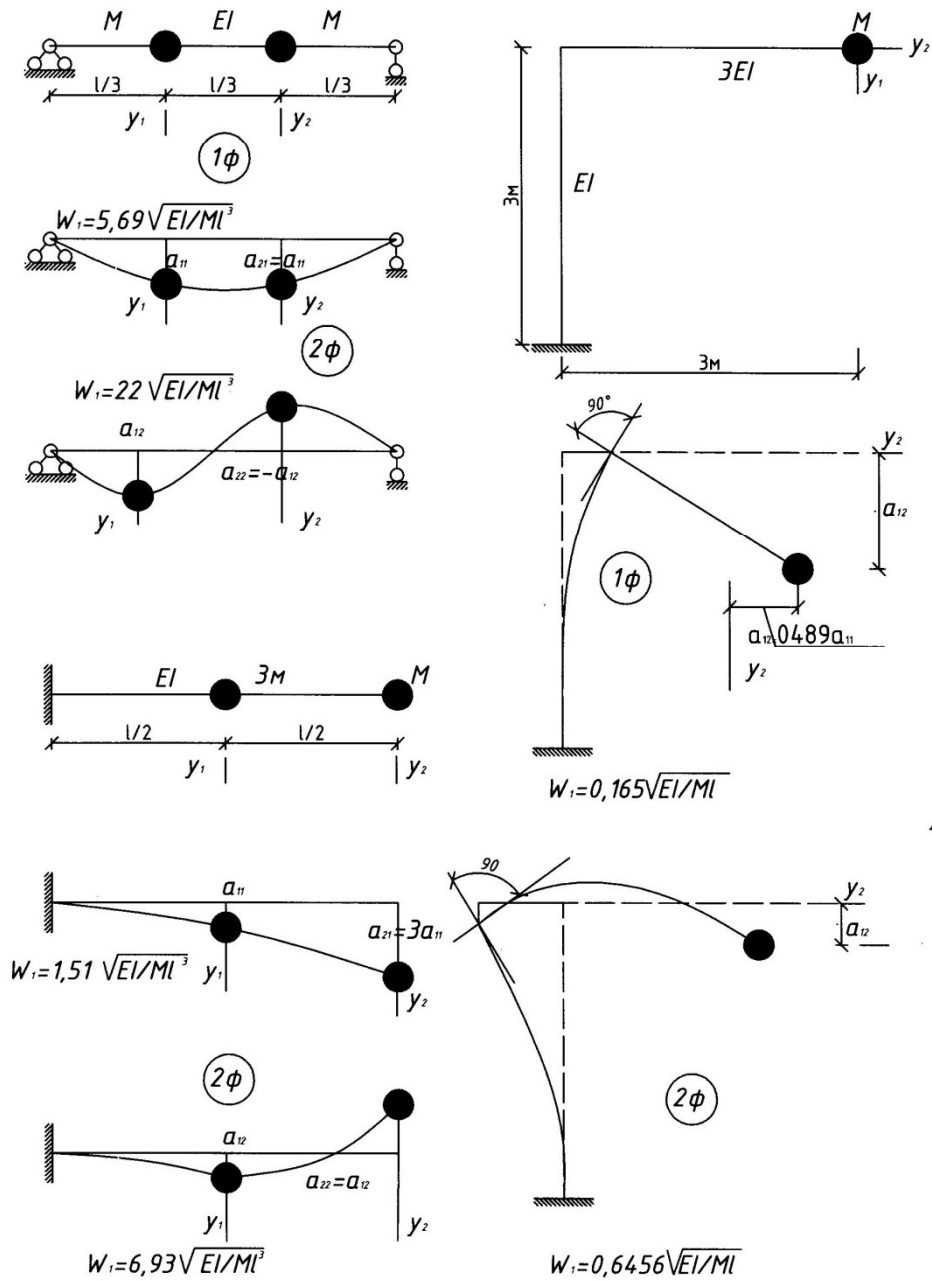


Рис.3.8

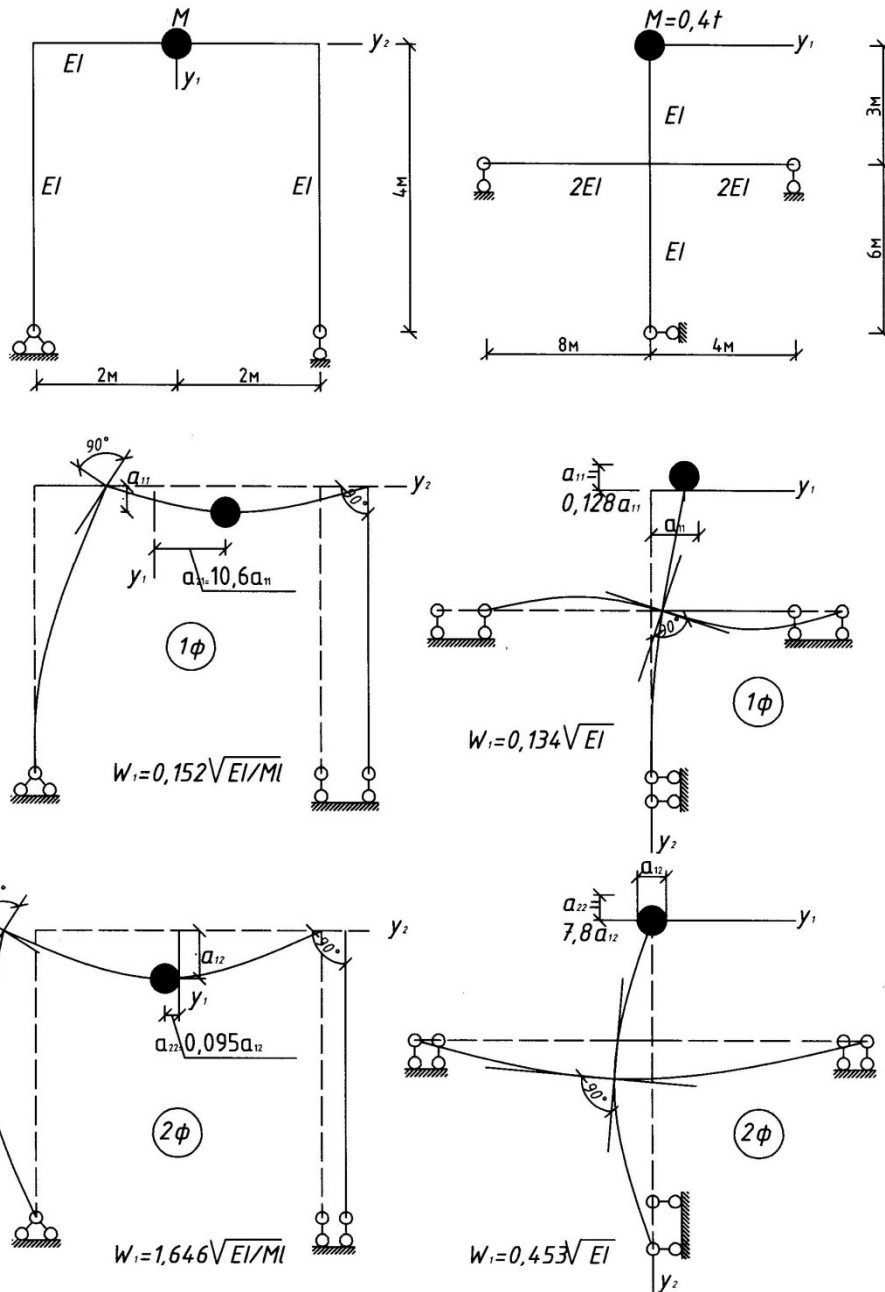


Рис. 3.9

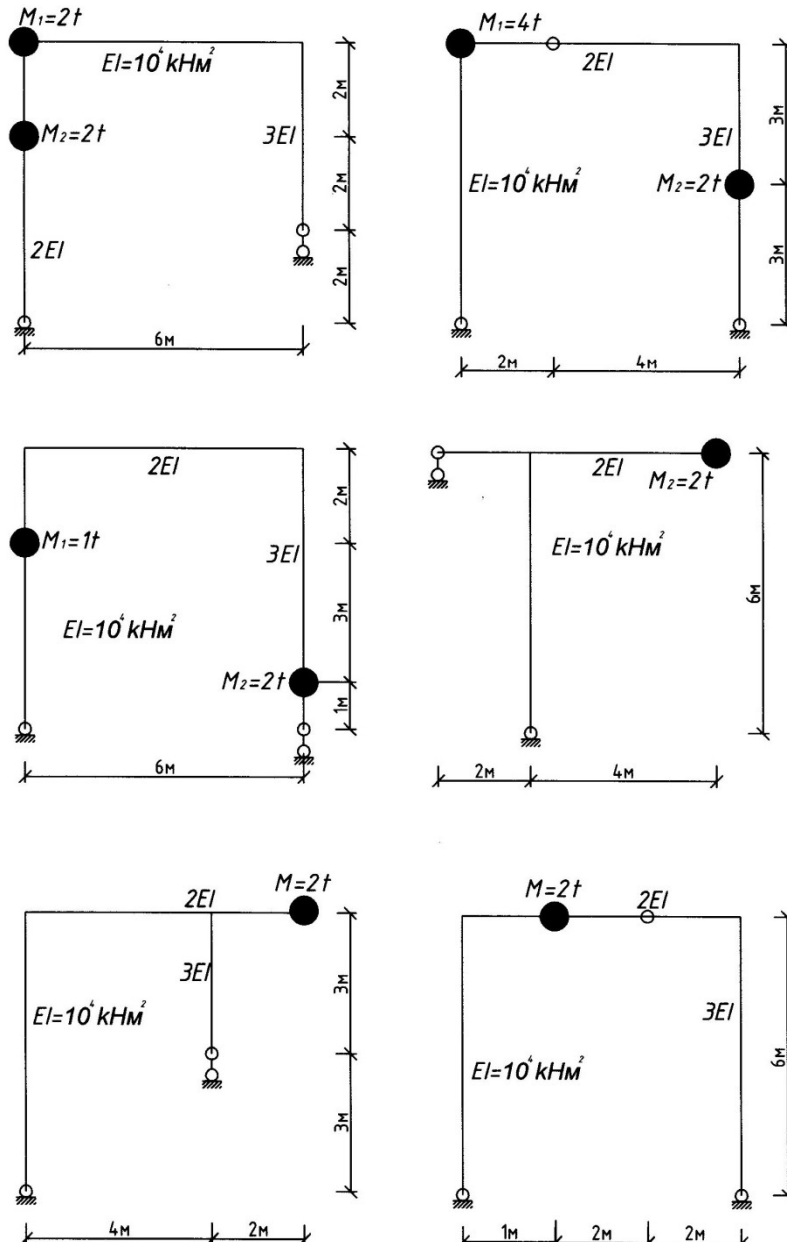


Рис.3.10

является сумма общего решения однородных уравнений (3.1) в виде (3.14) - y_{ci} , и частного решения неоднородных уравнений (3.22) y_{vi} . Это частное решение выражает вынужденные колебания системы, каждая масса которой совершает колебания по гармоническому закону с частотой нагрузки и имеет вид

$$y_{vi} = A_i \sin \theta t, (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.23)$$

Подставляя его в (3.22), получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (M_1 \delta_{11} \theta^2 - 1)A_1 + M_2 \delta_{12} \theta^2 A_2 + \dots + M_n \delta_{1n} \theta^2 A_n + \Delta_{1p}^* = 0; \\ M_1 \delta_{i1} \theta^2 A_1 + M_2 \delta_{i2} \theta^2 A_2 + \dots + M_n \delta_{in} \theta^2 A_n + \Delta_{ip}^* = 0; \\ M_1 \delta_{n1} \theta^2 A_1 + M_2 \delta_{n2} \theta^2 A_2 + \dots + (M_n \delta_{nn} \theta^2 - 1)A_n + \Delta_{np}^* = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

из которой определяются все значения амплитуд $A_1, A_2, \dots, A_n$, характеризующих форму вынужденных колебаний системы. Таким образом, общее решение уравнений (3.22) будет:

$$y_i = y_{ci} + y_{vi} = \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} a_{ik} \sin[\omega_k t + a_k] + A_i \sin \theta t, \quad (3.25)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Решение 3.25 показывает, что движение с « n » степенями свободы при гармонической нагрузке суммируется из свободных и вынужденных колебаний.

3.5. Динамический расчет балок и рам

Для динамического расчета рам и балок необходимо вычислить амплитуды A_i и усилия, возникающие при колебаниях. Амплитуды, сил инерции X_i , при вынужденных колебаниях системы в направлении y_i равны [4]:

$$X_i = A_i M_i \theta^2. \quad (3.26)$$

Их численные значения могут быть получены с учетом (3.26) решением системы уравнений (3.24), которое имеет вид канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1p}^* = 0; \\ \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip}^* = 0; \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn}^* X_n + \Delta_{np}^* = 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

где: $\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{M_i \theta^2}$ - главные коэффициенты канонических уравнений. Таким образом, амплитудные характеристики гармонической нагрузки учитываются

свободными членами Δ_{ip}^* , а частотные характеристики – коэффициентами δ_{ii}^* .

Для вычисления усилий в сечениях рамы, ее следует рассматривать как систему, подверженную статическому действию амплитуд сил инерции и амплитуды гармонической нагрузки, то есть:

$$M_g = M_p + \sum_{i=1}^n \overline{M}_i X_i, \quad (3.28)$$

где M_p —изгибающий момент от статического действия амплитудных значений гармонической нагрузки; $\overline{M}_i$ - изгибающий момент от сил $P_i = 1$, приложенных в направлении координатных осей y_i . По вычисленным значениям изгибающих моментов строятся эпюры динамических изгибающих моментов M_g . Построение эпюры динамических поперечных сил Q_g можно выполнить по эпюре M_g , используя известную теорему Журавского Д. И. Построение эпюры динамических продольных сил N_g производится по эпюре Q_g методом вырезания узлов. К вырезанному узлу прикладываются неизвестные продольные силы, которые принимаются растягивающими, поперечные силы с учетом эпюры Q_g , узловые амплитудные значения гармонической нагрузки, узловые инерционные силы X_i и составляют уравнения равновесия в виде: $\sum X = 0$; $\sum y = 0$.

Правильность построения эпюр динамических усилий M_g , Q_g , N_g проверяется выполнением условий равновесия $\sum X = 0$; $\sum y = 0$, $\sum M_0 = 0$ любой отсеченной части рамы, которые должны выполняться с погрешностью, не превышающей 3%.

3.6. Примеры динамического расчета рамы на гармоническую нагрузку

Пример 3.5.1. Выполнить динамический расчет рамы (рис. 3.11,а) на действие гармонической нагрузки

$$P(t) = P \sin \theta t, \text{ если } M_1 = 2\text{т}; M_2 = 4\text{т};$$

$$P=6 \text{ кН}, \theta = 0,8\omega_1; EI = 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Построить эпюры динамических изгибающих моментов M_g , поперечных Q_g и продольных сил N_g .

Решение.

1. Определяем степень свободы $n = 2$ и вводим координатные оси y_1 и y_2 (рис. 3.11.б).

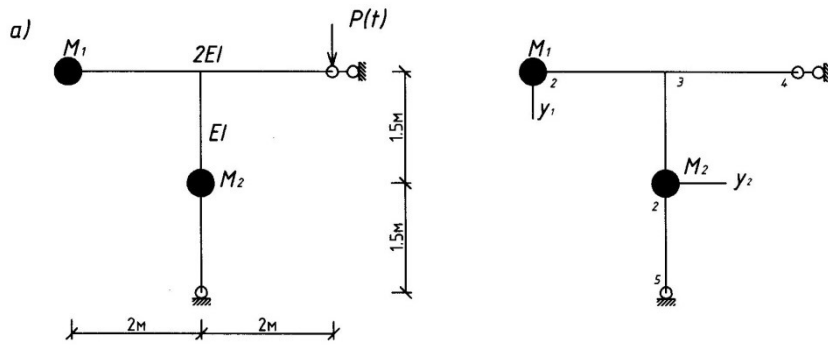


Рис. 3.11

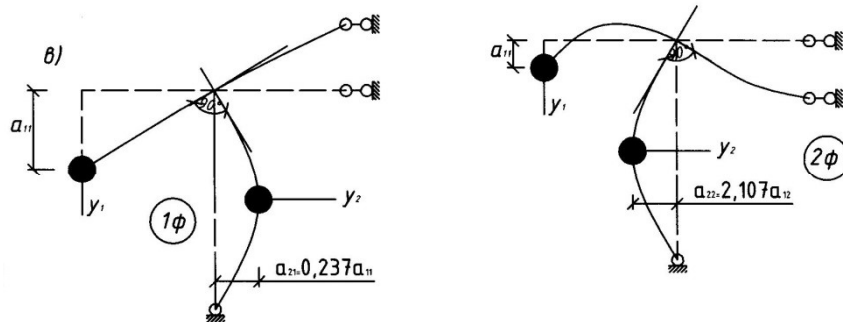
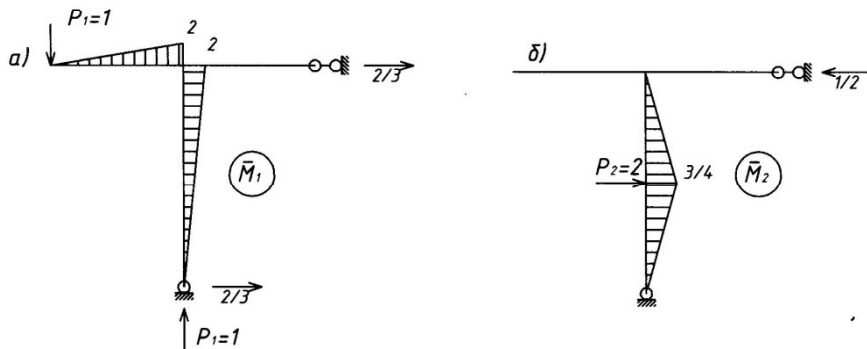


Рис.3.12

2. Строим эпюры изгибающих моментов от сил $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, приложенных по направлению координат y_1 и y_2 (рис. 3.12. а, б).

3. Вычисляем удельные перемещения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{9}{16EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{9}{8EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}.$$

4. Определяем частоты и периоды собственных колебаний (3.9), (3.10):

$$\begin{vmatrix} \left(2 \cdot \frac{16}{3EI} - \lambda \right) & 4 \cdot \frac{9}{8EI} \\ 2 \cdot \frac{9}{8EI} & \left(4 \cdot \frac{9}{16EI} - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = \frac{11,734}{EI}; \quad \lambda_2 = \frac{1,183}{EI}.$$

Проверка: $\lambda_1 + \lambda_2 = M_1 \delta_{11} + M_2 \delta_{22}; \quad \frac{11,734}{EI} + \frac{1,183}{EI} = \frac{12,917}{EI}; \quad 2 \cdot \frac{16}{3EI} + 4 \cdot \frac{9}{16EI} = \frac{12,917}{EI}.$

Собственные частоты и периоды колебаний равны:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{11,734}} = 29,19 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad T_1 = 0,215 \text{ с};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{1,183}} = 91,94 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad T_2 = 0,068 \text{ с}.$$

5. Определяем коэффициенты форм собственных колебаний (3.13), (3.17):

- для основного тона:

$$\varphi_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1; \quad \varphi_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = - \frac{2 \cdot 16/3EI - 11,734/EI}{4 \cdot 9/8EI} = 0,237;$$

- для второго тона

$$\varphi_{12} = \frac{a_{12}}{a_{12}} = 1; \quad \varphi_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = - \frac{2 \cdot 16/3EI - 1,183/EI}{4 \cdot 9/8EI} = -2,107.$$

Проверяем условие ортогональности (3.18):

$$2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,237 \cdot (-2,107) = 0,002. \text{ Погрешность } 0,002/2 = 0,1\% \text{ незначительна.}$$

6. Строим собственные формы колебаний (рис. 3.12, в, г).

7. Составляем уравнения движения системы (3.19):

$$y_1 = a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$y_2 = 0,237 a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - 2,107 a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

8. Определяем частоту гармонической нагрузки:

$$\theta = 0,8 \omega_1 = 0,8 \cdot 29,19 = 23,35 \text{ рад/с}.$$

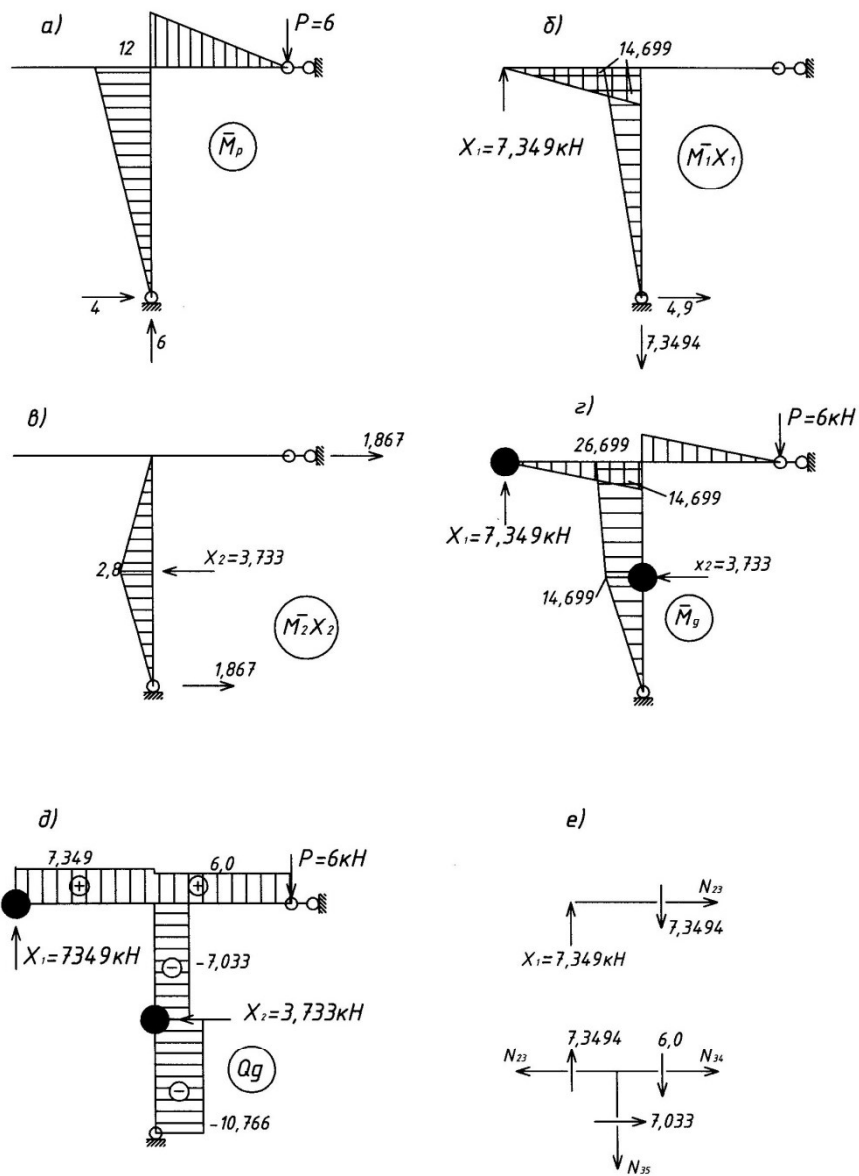


Рис.3.13

9. Строим эпюру изгибающих моментов от статического действия амплитуды гармонической нагрузки $P = 6$ кН (рис. 3.13, а).

10. Определяем перемещения от амплитудного значения гармонической нагрузки:

$$\Delta_{1p}^* = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = -\frac{24}{EI} = -24 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta_{2p}^* = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 = -\frac{27}{EI} = -6,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

11. Определяем главные коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{M_1 \theta^2} = \frac{16}{3} \cdot 10^{-4} - \frac{1}{2 \cdot 23,35^2} = -3,837 \cdot 10^{-4} \text{ м/кН};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{M_2 \theta^2} = \frac{9}{16} \cdot 10^{-4} - \frac{1}{4 \cdot 23,35^2} = -4,023 \cdot 10^{-4} \text{ м/кН}.$$

12. Составляем канонические уравнения (3.27):

$$\begin{cases} -3,837 \cdot 10^{-4} x_1 + 1,125 \cdot 10^{-4} x_2 - 24 \cdot 10^{-4} = 0; \\ 1,125 \cdot 10^{-4} x_1 - 4,023 \cdot 10^{-4} x_2 - 6,75 \cdot 10^{-4} = 0, \end{cases}$$

решением которых определяем амплитуды сил инерции:

$$x_1 = -7,3494 \text{ кН}; \quad x_2 = -3,733 \text{ кН}.$$

13. Строим эпюры изгибающих моментов от амплитуд сил инерции (рис. 3.13, б, в).

14. Вычисляем значения динамических изгибающих моментов в сечениях рамы (3.28) и строим эпюру M_g (рис. 3.13, г).

15. Вычисляем значения динамических поперечных сил в сечениях рамы:

$$Q_{13} = Q_{31} = \frac{14,699 - 0}{2} = 7,3494 \text{ кН};$$

$$Q_{34} = Q_{43} = \frac{0 - (-12)}{2} = 6,0 \text{ кН};$$

$$Q_{53} = -\frac{3,733}{2} + \frac{-26,699 - 0}{3} = -10,766 \text{ кН};$$

$$Q_{35} = \frac{3,733}{2} + \frac{-26,699 - 0}{3} = -7,033 \text{ кН}$$

и строим эпюру динамических поперечных сил Q_g (рис. 3.13, д).

16. Вычисляем значения динамических продольных сил в сечениях рамы

(рис. 3.13, е):

$N_{23} = N_{32} = 0$; $N_{34} = -7,033$ кН; $N_{35} = 1,349$ кН, и строим эпюру динамических продольных сил N_g (рис. 3.14, а).

17. Выполняем статическую проверку (3.29) (рис. 3.14, б):

$$\sum X = 0: -7,033 - 3,733 + 10,766 = 0;$$

$$\sum Y = 0: 7,349 - 6,0 - 1,349 = 0;$$

$$\sum M_3 = 0: -7,349 \cdot 2 - 6,0 \cdot 2 + 7,033 \cdot 3 + 3,733 \cdot 1,5 = 0.$$

Пример 3.5.2. Выполнить динамический расчет рамы (рис. 3.14,в) на действие гармонической нагрузки $q(t) = q \cdot \sin \theta t$, если $q = 0,2$ кН/м; $\theta = 0,8\omega_1$. Построить эпюры динамических изгибающих моментов M_g , поперечных сил Q_g и продольных сил N_g .

Решение.

1. Определяем степень свободы $n=2$ и вводим координатные оси y_1 и y_2 (рис. 3.14.в).

2. Строим эпюры изгибающих моментов от сил $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, приложенных по направлению координат y_1 и y_2 (рис. 3.3).

3. Вычисляем удельные перемещения (пример 3.3.1):

$$\delta_{11} = \frac{4,67}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}; \quad \delta_{22} = \frac{102}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{10}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}.$$

4. Определяем частоты и периоды собственных колебаний:

$$\omega_1 = 15,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad T_1 = 0,403 \text{ с};$$

$$\omega_2 = 82,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad T_2 = 0,076 \text{ с}.$$

5. Определяем коэффициенты форм собственных колебаний и строим формы колебаний (рис. 3.4): $\varphi_{11} = 1$; $\varphi_{21} = -9384$; $\varphi_{12} = 1$; $\varphi_{22} = 0,102$.

6. Составляем уравнения движения системы:

$$y_1 = a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$y_2 = -9,384 a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + 0,102 a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

7. Определяем частоту гармонической нагрузки:

$$\theta = 0,8 \omega_1 = 0,8 \cdot 15,6 = 12,48 \text{ рад/с}.$$

8. Строим эпюру изгибающих моментов от статического действия амплитуды

гармонической нагрузки $q = 0,2 \text{ кН/м}$ (рис. 3.14, г).

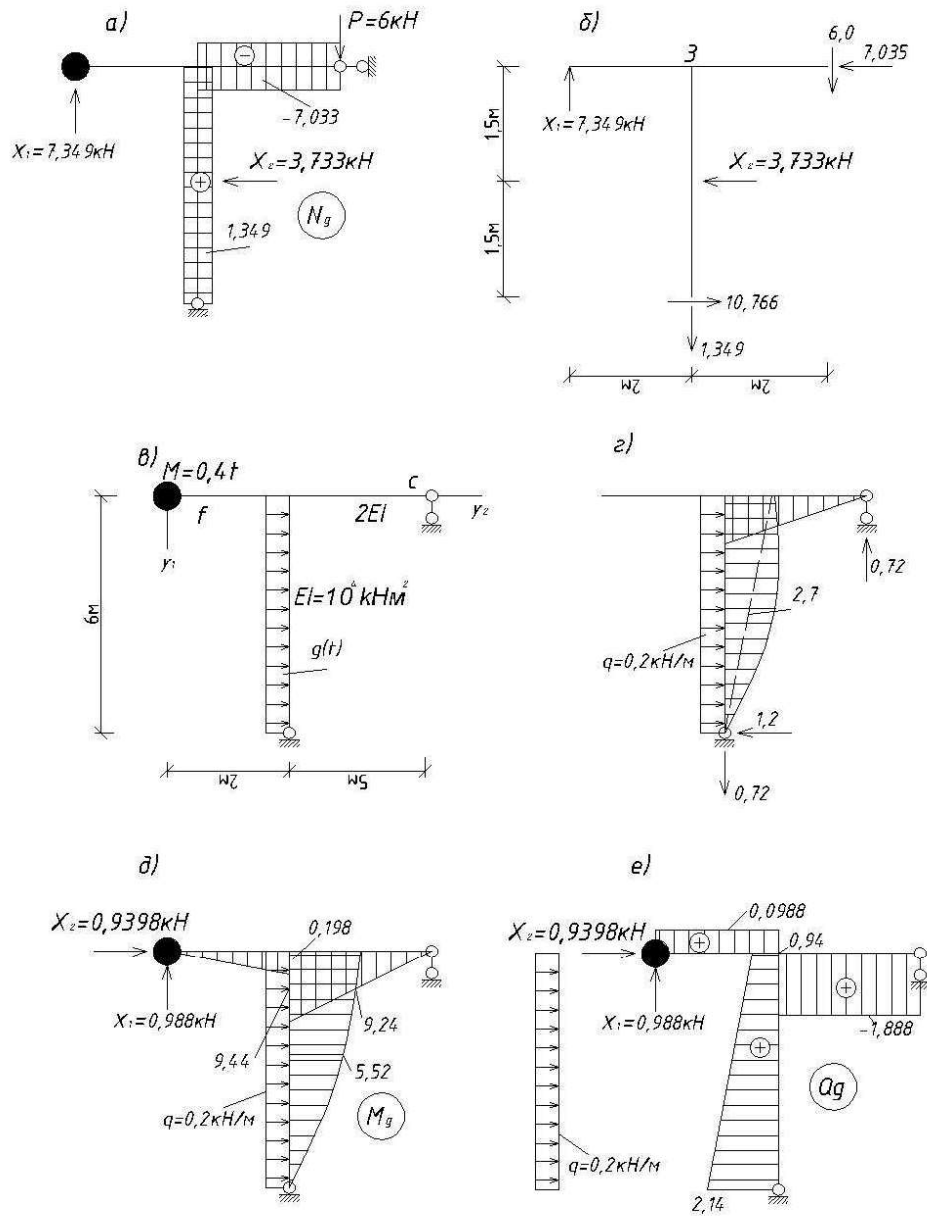


Рис. 3.14

9. Определяем перемещение от амплитудного значения гармонической нагрузки:

$$\Delta_{1p}^* = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{6,0}{EI} = -6 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta_{2p}^* = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{6}{6EI} (4 \cdot 2,7 \cdot 3 + 6 \cdot 3,6) = \frac{54}{EI} = 54 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

10. Определяем главные коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{M_1 \theta^2} = 4,67 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{0,4 \cdot 12,48^2} = -155,84 \cdot 10^{-4} \text{ м/кН};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{M_2 \theta^2} = 102 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{0,4 \cdot 12,48^2} = -58,51 \cdot 10^{-4} \text{ м/кН}.$$

11. Составляем канонические уравнения:

$$\begin{cases} -155,84 \cdot 10^{-4} x_1 - 10 \cdot 10^{-4} x_2 - 6 \cdot 10^{-4} = 0; \\ -10 \cdot 10^{-4} x_1 - 58,51 \cdot 10^{-4} x_2 + 54 \cdot 10^{-4} = 0, \end{cases}$$

решением которых определяем амплитуды сил инерции:

$$x_1 = -0,09881 \text{ кН}; \quad x_2 = 0,9398 \text{ кН}.$$

12. Вычисляем значения динамических изгибающих моментов в сечениях рамы (3.28) и строим эпюру M_g (рис. 3.14, д).

13. Вычисляем значения динамических поперечных сил в сечениях рамы и строим эпюру Q_g (рис. 3.14, е).

14. Вычисляем значения динамических продольных сил в сечениях рамы и строим эпюру N_g (рис. 3.15, а).

15. Выполняем статическую проверку (3.29) (рис. 3.15, б):

$$\sum X = 0: \quad 0,9398 + 0,2 \cdot 6 - 2,14 = 0;$$

$$\sum Y = 0: \quad 0,0988 + 1,888 - 1,99 = 0;$$

$$\sum M_b = 0: \quad -0,0988 \cdot 2 + 1,888 \cdot 5 + 0,2 \cdot 6,3 - 2,14 \cdot 6 = 0.$$

16. Определяем амплитуды вынужденных колебаний (3.24):

$$\begin{cases} (0,4 - 4,67 \cdot 10^4 \cdot 12,48^2 - 1) \cdot A_1 + 0,4 \cdot (-10 \cdot 10^{-4}) \cdot A_2 - 6 \cdot 10^{-4} = 0; \\ 0,4 \cdot (-10 \cdot 10^{-4}) \cdot A_1 + (0,4 \cdot 102 \cdot 10^{-4} \cdot 12,48^2 - 1) \cdot A_2 + 54 \cdot 10^{-4} = 0 \end{cases}$$

$A_1 = -0,0006241 \text{ м}; \quad A_2 = 0,01482 \text{ м},$ и строим форму вынужденных

колебаний (рис. 3.15.в).

17. Составляем уравнения движения системы при вынужденных колебаниях

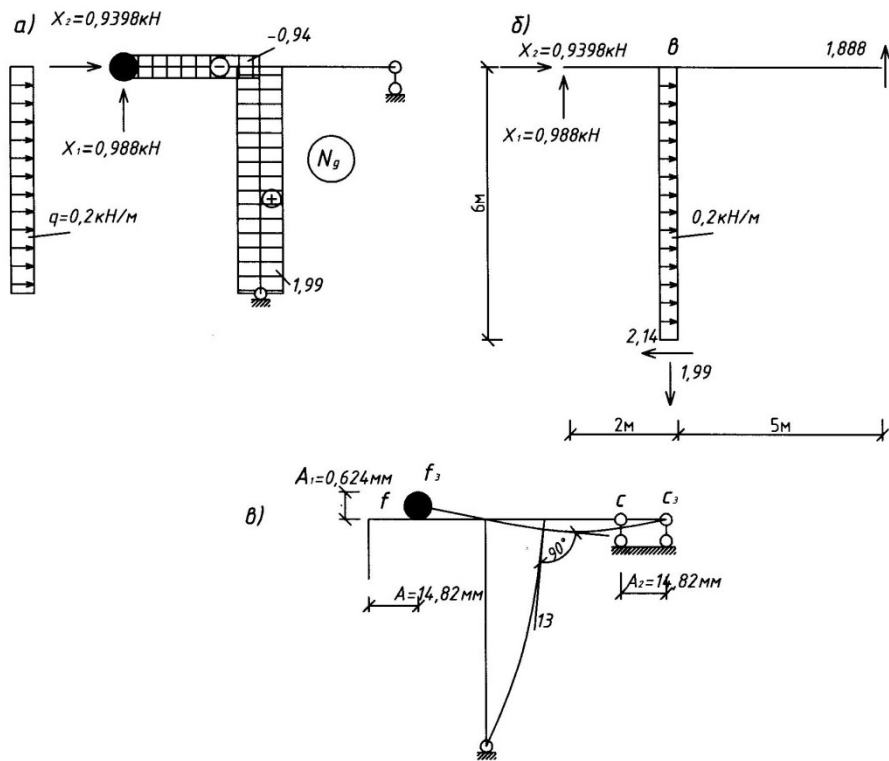


Рис. 3.15

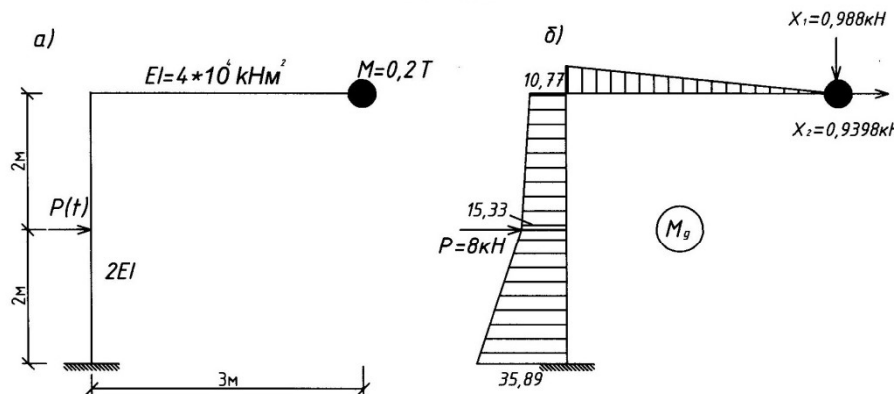


Рис. 3.16

$$y_1 = a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) - 0,0006241 \cdot \sin \theta t;$$

$$y_2 = -9,384 a_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + 0,102 a_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + 0,01482 \cdot \sin \theta t.$$

Пример 3.5.3. Выполнить динамический расчет рам (рис. 3.16, а; 3.17, в) на действие гармонической нагрузки $P(t) = P \sin \theta t$, при $P = 8 \text{ кН}$, $\theta = 0,9 \omega_1$. Построить эпюры Mg , Qg , Ng . Результаты решения приведены на рисунках 3.16 и 3.17.

Пример 3.5.4. Выполнить динамический расчет рам (рис. 3.18, 3.19) на действие гармонической нагрузки $P(t) = P \sin \theta t$, при $P = 10 \text{ кН}$, $\theta = 0,8 \omega_1$. Построить эпюры динамических изгибающих моментов, поперечных и продольных сил самостоятельно.

4. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ

Решение задачи о колебаниях системы с распределенной массой (с бесконечным числом степеней свободы) приводит в общем случае к сложным математическим выкладкам. При динамическом расчете сооружений на практике часто бывает достаточной оценка усилий, напряжений и деформаций, возникающих при главных колебаниях основного тона. Поэтому, широкое распространение получили приближенные методы (способы) определения основной (первой) собственной частоты колебаний. Из приближенных наиболее часто используются: энергетический метод; способ приведенной массы; способ замены распределенной массы сосредоточенными массами; способ Данкерля.

4.1. Энергетический метод. Формула Рэлея

В этом методе используется закон сохранения механической энергии:

$$\Pi + E = \text{const.} \quad (4.1)$$

При этом пренебрегают силами сопротивления и полагают, что колебания отдельных точек системы (рис. 4.1) около положения равновесия происходят по гармоническому закону:

$$y(x_1 t) = y(x) \sin(\omega t + \alpha), \quad (4.2)$$

где $y(x)$ - уравнение собственной формы колебаний.

Тогда все точки системы одновременно проходят через положение равновесия, где $y = 0$, $\Pi = 0$, а кинетическая энергия E максимальная [5]

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l m(x) y^2(x) dx, \quad (4.3)$$

и затем одновременно достигают крайних положений, где их скорости равны нулю, $E = 0$, а потенциальная энергия становится Π максимальной [5]

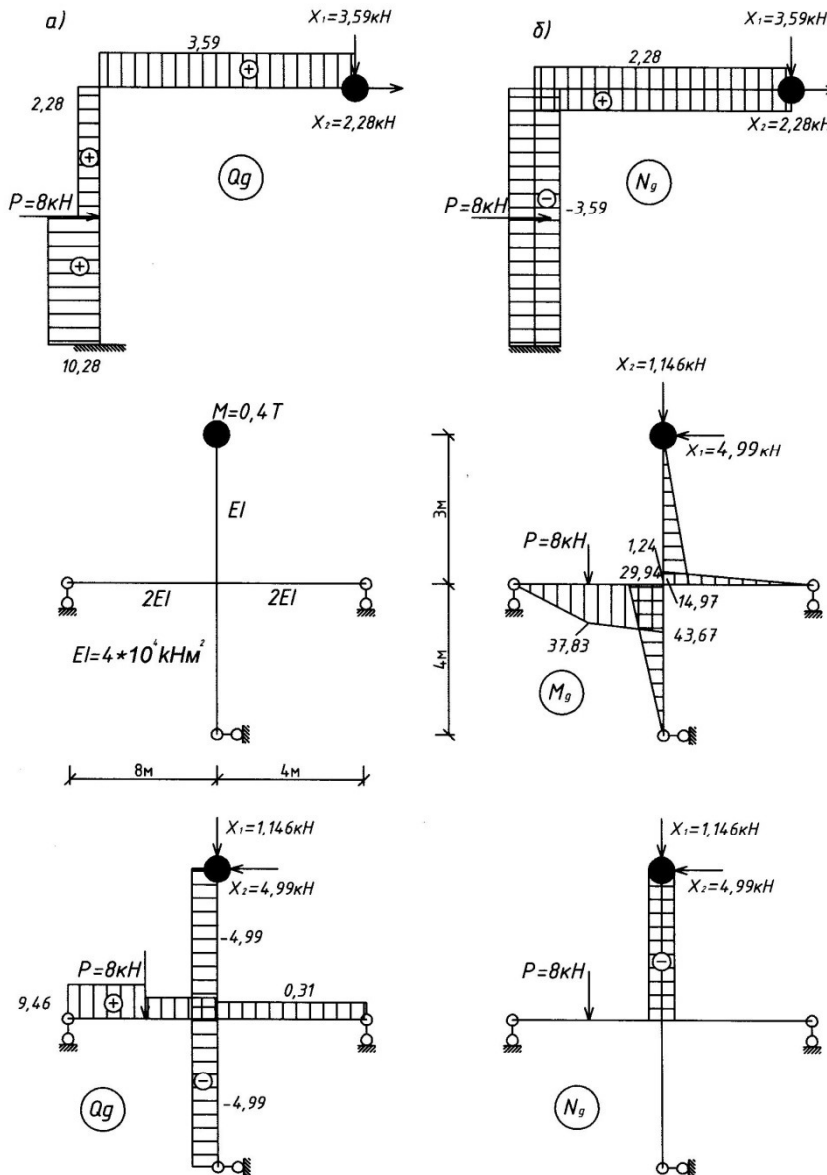
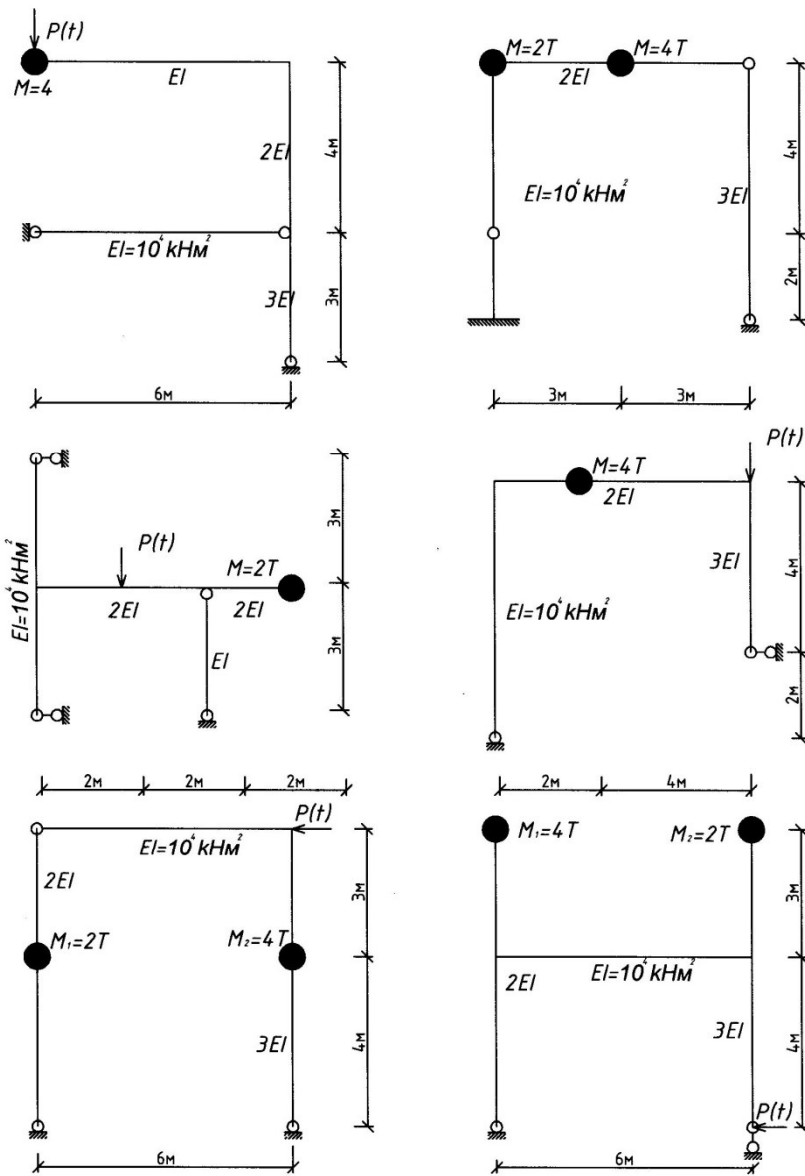
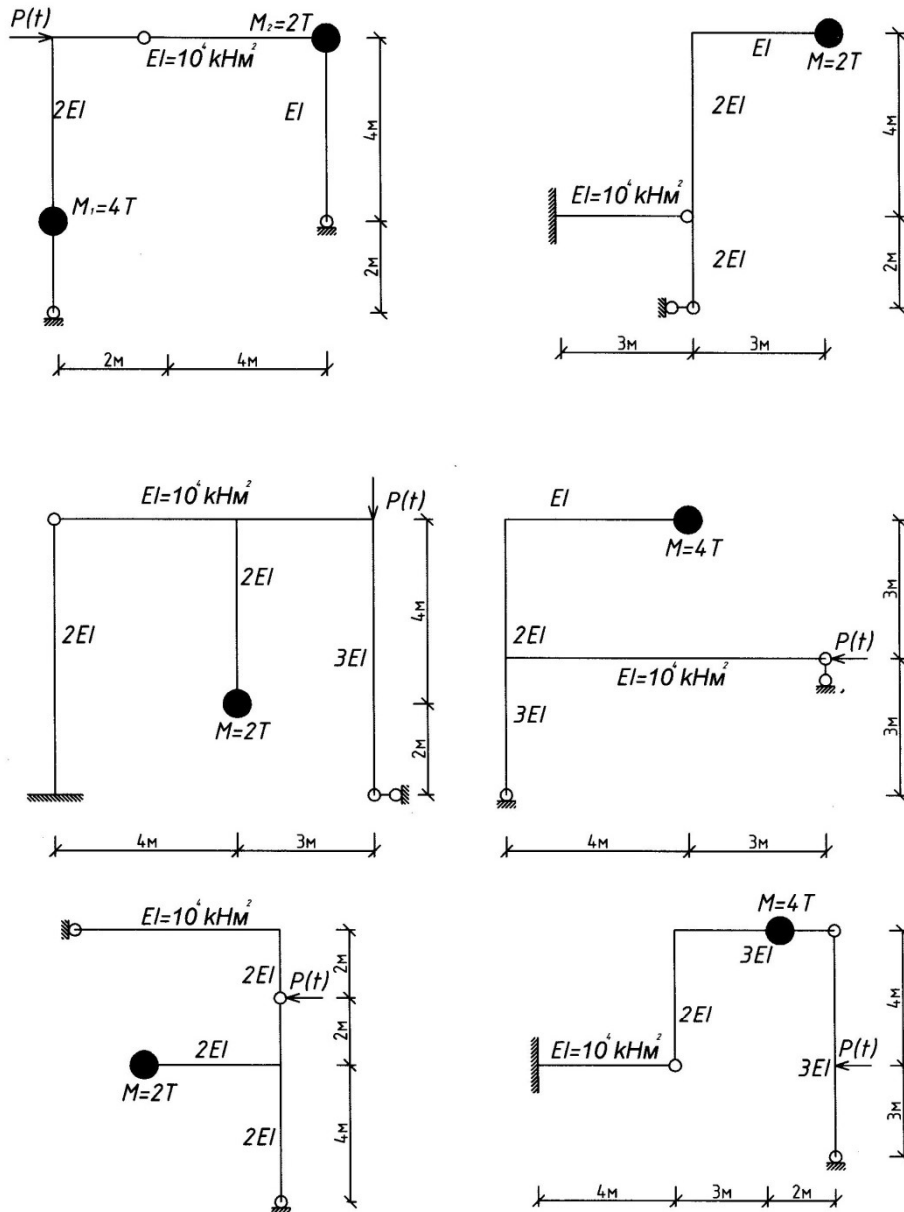


Рис. 3.17



Puc. 3.18



Puc.3.19

$$\Pi_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI [\ddot{y}(x)]^2 dx. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в закон сохранения энергии $\Pi_{max} = E_{max}$, получим формулу Рэлея для определения основной собственной частоты колебаний:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI [\ddot{y}(x)]^2 dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx}. \quad (4.5)$$

При подстановке в (4.5) точного выражения формы колебаний, получим точное значение собственной частоты. Однако, в большинстве случаев, уравнение формы колебаний заранее неизвестно и его задают приближенно. Принимаемая для решения форма собственных колебаний основного тона должна отвечать граничным условиям и не иметь узловых точек. Обобщая (4.5) на системы с распределенной массой $m(x)$ и n сосредоточенными массами M_i , ($i = 1, 2 \dots n$), получим I формулу Рэлея:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI [\ddot{y}(x)]^2 dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i y^2(x_i)}, \quad (4.6)$$

где $y(x_i)$ - амплитуда колебаний точки с массой M_i в соответствии с принятой формой колебаний $y(x)$.

Уравнение формы собственных колебаний $y(x)$ удобно принимать подобным уравнению прогиба системы от статической нагрузки $g(x) = g \cdot m(x)$, то есть от действия сил тяжести, соответствующих массе системы. В этом случае получим II формулу Рэлея:

$$\omega^2 = g \frac{\int_0^l m(x) y(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i y(x_i)}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i y^2(x_i)}. \quad (4.7)$$

Пример 4.1.1. Определить основную собственную частоту колебаний простой балки с равномерно-распределенной массой (рис. 4.2).

Решение.

а). Зададим форму собственных колебаний точным уравнением:

$$y(x) = A_1 \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Вычислим интегралы, входящие в (4.5):

$$\int_0^l EI [\ddot{y}(x)]^2 dx = A_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = A_1^2 \cdot \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2},$$

$$\int_0^l y^2(x) dx = A_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = A_1^2 \cdot \frac{l}{2}.$$

Тогда, согласно (4.5), будем иметь: $\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{9,8696}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$

Получено точное значение основной собственной частоты, так как уравнение собственной формы колебаний задано точно.

б). Зададим форму собственных колебаний в виде уравнения прогиба от статической нагрузки $q = mg$:

$$y(x) = \frac{q}{24EI} (l^3 x - 2lx^3 + x^4).$$

Вычислим интегралы, входящие в (4.7):

$$\int_0^l y(x) dx = \frac{q}{24EI} \int_0^l (l^3 x - 2lx^3 + x^4) dx = \frac{ql^5}{24EI \cdot 5},$$

$$\int_0^l y^2(x) dx = \left(\frac{q}{24EI} \right)^2 \int_0^l (l^3 x - 2lx^3 + x^4)^2 dx = \left(\frac{q}{24EI} \right)^2 \frac{31}{630} l^9.$$

Тогда, согласно (4.7), получим:

$$\omega^2 = \frac{24EI \cdot g \cdot 630 \cdot l^5}{mg \cdot 31 \cdot 5 \cdot l^9} = 97,55 \frac{EI}{ml^4}; \quad \omega = \frac{9,88}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

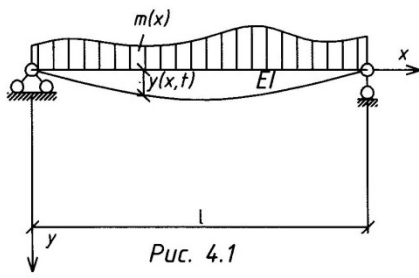
Погрешность решения б) в сравнении с решением а) составляет 0,105%. Формула Рэлея всегда дает несколько завышенное значение собственной частоты.

Пример 4.1.2. Определить основную собственную частоту колебаний простой балки с двумя сосредоточенными массами (рис. 4.3).

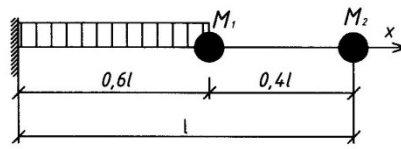
Решение. Зададим форму собственных колебаний в виде уравнения прогиба от статической нагрузки $P = mg$ и для определения y_1 и y_2 , входящих в (4.7), построим эпюры изгибающих моментов от нагрузки и от силы $P = 1$ (рис. 4.3).

Используя правило перемножения эпюр Верещагина, будем иметь:

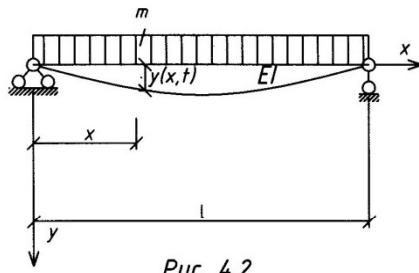
$$y_1 = y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Mgl}{3} \cdot \frac{1}{EI} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} l \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Mgl}{3} \cdot \frac{1}{EI} + \\ + \frac{Mgl}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{5}{162} \cdot \frac{Mgl^3}{EI}.$$



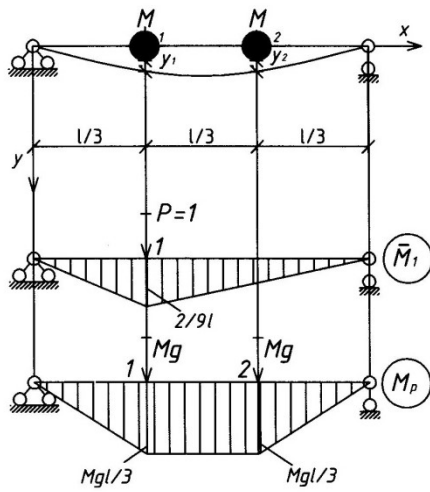
Puc. 4.1



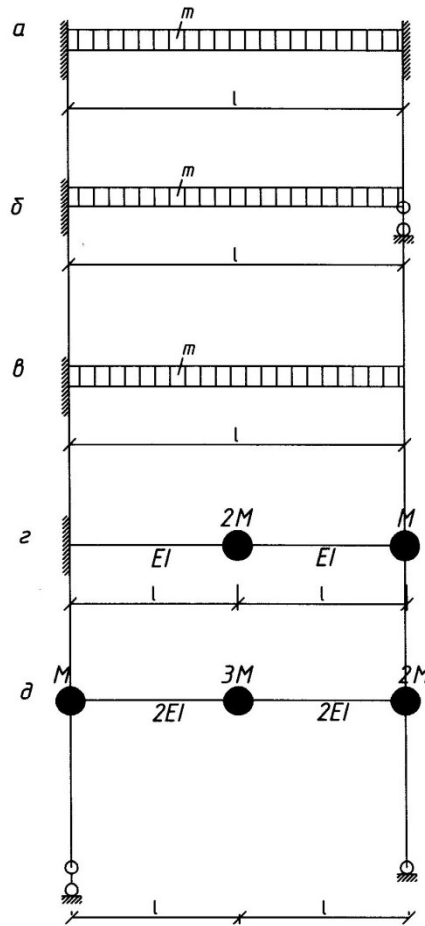
Puc. 4.4



Puc. 4.2



Puc. 4.3



Puc. 4.5

Тогда:

$$\omega^2 = g \frac{M \frac{5}{162} \cdot \frac{Mgl^3}{EI} \cdot 2}{M \left(\frac{5}{162} \cdot \frac{Mgl^3}{EI} \right)^2 \cdot 2} = \frac{162EI}{5Ml^3}; \quad \omega = 5,69 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}.$$

Получено точное значение основной собственной частоты.

Пример 4.1.3. Определить основную собственную частоту колебаний консольной балки (рис. 4.4) жесткостью EI , пролетом l с равномерно-распределенной массой m и двумя сосредоточенными массами $M_1 = 0,5ml$, $M_2 = 0,2ml$.

Решение.

Задаем форму собственных колебаний уравнением $y = A_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$.

Вычисляем интегралы, входящие в (4.5):

$$\begin{aligned} \int_0^l [\ddot{y}(x)]^2 dx &= \int_0^l \left[A_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \right]^{11} dx = \frac{3,038}{l^3} A_1^2; \\ \int_0^{0,6l} m(x) y^2(x) dx &= \int_0^{0,6l} m \left[A_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \right]^2 dx = 0,536ml A_1^2; \\ y_1^2(x) &= y_1^2(0,6l) = \left[A_1 \left(1 - \cos \frac{\pi \cdot 0,6l}{2l} \right) \right]^2 = 0,1698 A_1^2; \\ y_2^2(x) &= y_2^2(l) = \left[A_1 \left(1 - \cos \frac{\pi l}{2l} \right) \right]^2 = A_1^2. \end{aligned}$$

Подставляем полученные величины в (4.5) и определяем основную собственную частоту:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= EI \frac{3,038 \cdot A_1^2 / l^3}{0,536ml A_1^2 + 0,5ml \cdot 0,1698 A_1^2 + 0,2ml \cdot A_1^2} = \frac{3,038EI}{0,8209ml^4} = 3,701 \frac{EI}{ml^4}; \\ \omega &= 1,924 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}. \end{aligned}$$

Пример 4.1.4. Определить самостоятельно основную собственную частоту колебаний следующих систем (рис. 4.5), задаваясь формой собственных колебаний в

виде уравнения прогиба от статической нагрузки $q = m \cdot g$:

- в схеме «а»: $y(x) = \frac{ql^2}{24EI} x^2 \left(1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$;
- в схеме «б»: $y(x) = \frac{ql^2}{48EI} \left(5\frac{x^3}{l^3} - 2\frac{x^4}{l^4} - 3\frac{x^2}{l^2}\right)$;
- в схеме «в»: $y(x) = \frac{6ql^2}{40EI} \left(x^2 - \frac{1}{6}\frac{x^4}{l^2}\right)$;
- в схемах «г» и «д»: от статической нагрузки $P = M \cdot g$.

Результаты решения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \omega &= 22,45 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}; & \text{б) } \omega &= 15,45 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}; & \text{в) } \omega &= 3,59 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}; \\ \text{г) } \omega &= 0,56 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}; & \text{д) } \omega &= 0,498 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}. \end{aligned}$$

4.2. Способ приведенной массы

В этом способе система с распределенной массой m_x и n сосредоточенными массами M_i ($i=1,2,\dots,n$) (рис. 4.6) заменяется системой с одной степенью свободы, имеющей массу $M_{\text{пр}}$, сосредоточенную в произвольной точке «а». Законы движения таких систем описываются уравнением в форме Фурье [5]:

$$y(x, t) = y(x)y(t), \quad (4.8)$$

где $y(t)$ - функция, определяющая движение системы во времени, а сами системы считаются динамически эквивалентными. При таком условии, системы должны иметь одинаковые кинетические энергии E в любой момент времени [5], то есть

$$E = \frac{1}{2} \dot{y}^2(t) \left[\int_0^l m(x) y^2(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i y^2(x_i) \right] \quad (4.9)$$

для заданной системы и

$$E = \frac{1}{2} M_{\text{пр}} \cdot y_a^2 \cdot \dot{y}^2(t) \quad (4.10)$$

для системы с одной степенью свободы.

Приравнявая (4.9) и (4.10), получаем выражение приведенной массы

$$M_{\text{пр}} = M_a = \frac{\int_0^l m(x) y^2(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i y^2(x_i)}{y_a^2} \quad (4.11)$$

и основной собственной частоты

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M_a \delta_{aa}}}, \quad (4.12)$$

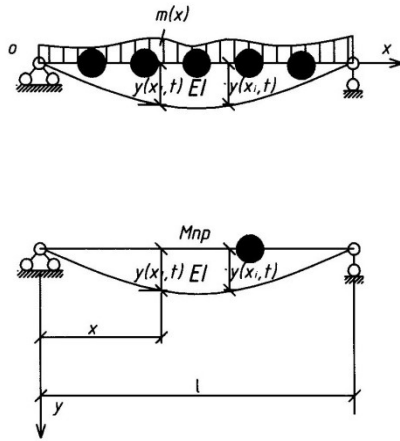


Рис. 4.6

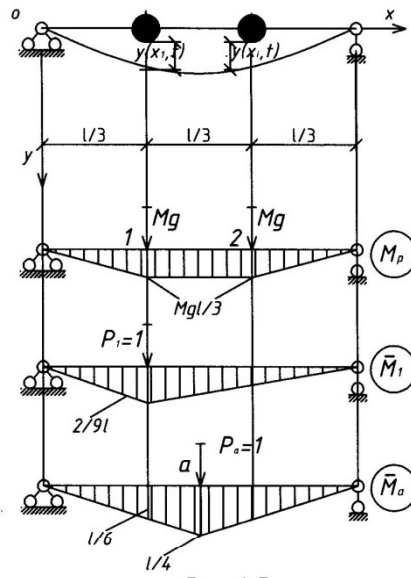


Рис. 4.7

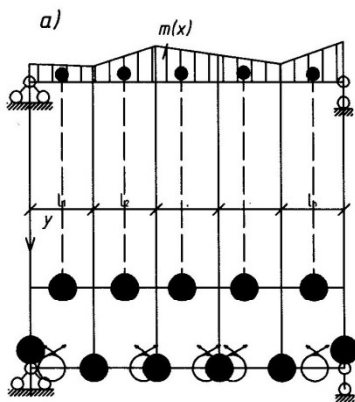
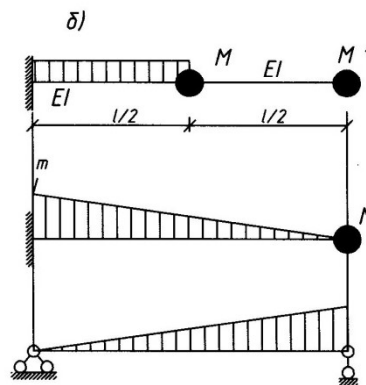


Рис. 4.8



где $y(x)$ – уравнение собственной формы колебаний; $y(x_i)$ и y_a – ординаты формы собственных колебаний в точках, соответственно, где сосредоточена масса M_i и приведенная M_a ; δ_{aa} – удельное перемещение в точке a , где сосредоточена приведенная масса M_a .

Пример 4.2.1. Определить основную собственную частоту колебаний простой балки с равномерно-распределенной массой (рис. 4.2).

Решение.

а) Приведем массу в середину пролета и зададим форму собственных колебаний точным уравнением:

$$y(x) = A_1 \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Вычислим интеграл, входящий в (4.11):

$$\int_0^l m(x) y^2(x) dx = mA_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = A_1^2 \frac{ml}{2},$$

а также y_a при $x = \frac{l}{2}$ и δ_{aa} :

$$y_a = A_1 \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = A_1, \quad \delta_{aa} = \frac{l^3}{48EI}.$$

Тогда:

$$M_a = \frac{A_1^2 \cdot ml}{2 \cdot A_1^2} = \frac{ml}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 48EI}{m \cdot l \cdot l^3}} = \frac{9,798}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Погрешность решения 0,72% в сравнении с точным решением, приведенным в примере 4.1.1 а.

б) Приведем массу в середину пролета и зададим форму собственных колебаний уравнением: $y(x) = \frac{q}{24EI} (l^3 x - 2lx^3 + x^4)$.

Вычислим интеграл, входящий в (4.11):

$$\int_0^l m(x) y^2(x) dx = m \left(\frac{q}{24EI} \right)^2 \int_0^l (l^3 x - 2lx^3 + x^4)^2 dx = m \left(\frac{q}{24EI} \right)^2 \frac{31}{630} l^9,$$

а также y_a при $x = \frac{l}{2}$ и δ_{aa} :

$$y_a = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{5}{16} l^4 \cdot \frac{q}{24EI}, \quad \delta_{aa} = \frac{l^3}{48EI}.$$

Тогда:

$$M_a = \frac{m \left(\frac{q}{24EI} \right)^2 \cdot \frac{31}{630} l^9}{\left(\frac{q}{24EI} \right)^2 \cdot \left(\frac{5}{16} l^4 \right)^2} = 0,5039 ml, \quad \omega = \sqrt{\frac{48EI}{0,5039 ml^4}} = \frac{9,76}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Погрешность решения составляет 1,11% в сравнении с точным решением, приведенным в примере 4.1.1 а.

Пример 4.2.2. Определить основную собственную частоту колебаний простой балки с двумя сосредоточенными массами (рис. 4.7).

Решение.

Зададим форму собственных колебаний в виде уравнения прогиба от статической нагрузки $P = mg$ и для определения y_1 и y_2 , y_a и δ_{aa} , входящих в (4.11) и (4.12), построим эпюры изгибающих моментов от нагрузки и от сил $P = 1$ и $P_a = 1$ (рис. 4.7).

Используя правило перемножения эпюр Верещагина, будем иметь:

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Mgl}{3} \cdot \frac{1}{EI} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} l \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Mgl}{3} \cdot \frac{1}{EI} + \\ &+ \frac{Mgl}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{5}{162} \cdot \frac{Mgl^3}{EI}; \\ y_a &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Mgl}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{EI} + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{6} + \frac{l}{4} \right) \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{Mgl}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{23Mgl^3}{4 \cdot 162EI}. \\ \delta_{aa} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{EI} \cdot 2 = \frac{l^3}{48EI}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$M_a = \frac{M \left(\frac{5}{162} \cdot \frac{Mgl^3}{EI} \right)^2 \cdot 2}{\left(\frac{23}{4 \cdot 162} \cdot \frac{Mgl^3}{EI} \right)^2} = 1,5123M; \quad \omega = \sqrt{\frac{48EI}{1,5123Ml^3}} = 5,63 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}.$$

Погрешность решения в сравнении с примером 4.1.2 составляет 1,05%.

Если привести обе сосредоточенные массы в точку «1» или «2», то погрешность будет больше и составит 3,13%, так как в этом случае $\omega = 5,512 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}$.

Пример 4.2.3. Определить основную собственную частоту колебаний консольной балки (рис.4.4) с распределенной по длине массой m и

сосредоточенными массами $M_1 = 0,5ml$ и $M_2 = 0,2ml$.

Решение.

а). Зададим форму собственных колебаний уравнением $y(x) = A_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right)$

и приведем все массы в точку M_1 .

Вычислим интеграл в (4.1):

$$\int_0^{0,6l} m(x) y^2(x) dx = \int_0^{0,6l} m \left[A_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) \right]^2 dx = 0,536mlA_1^2,$$

и $y_1^2(x) = y_1^2(0,6l) = 0,1698A_1^2$, $y_2^2(x) = y_2^2(l) = A_1^2$.

$$\delta_{aa} = \frac{(0,6l)^3}{3EI} = 0,072 \frac{l}{EI}.$$

Тогда:

$$M_a = \frac{0,536mlA_1^2 + 0,5ml \cdot 0,1698A_1^2 + 0,2mlA_1^2}{0,1698A_1^2} = 4,8345ml$$

и,

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{4,8345ml \cdot 0,072l^3}} = 1,695 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

б). Приведем все массы в точку M_2 . В результате решения задачи получим:

$$\omega = 1,912 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

Пример 4.2.4. Определить самостоятельно основную собственную частоту колебаний следующих систем (рис. 4.5), задаваясь формой собственных колебаний аналогичными примеру (4.1.4), и приводя распределенную и сосредоточенные массы в середину пролета в схемах «а» и «б», на конец консоли в схемах «в» и «г» и в левый или правый узел в схеме «д».

Результаты решения:

$$\text{а) } \omega = 21,74 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}; \quad \text{б) } \omega = 15,08 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}; \quad \text{в) } \omega = 3,66 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}};$$

$$\text{г) } \omega = 0,55 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad \text{д) } \omega = 0,494 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

4.3. Способ замены распределенной массы сосредоточенными

Этот способ позволяет определить как основную, так и высшие собственные частоты колебаний. Распределенная масса $m(x)$ заменяется системой сосредоточенных масс

$$M_i = \int_{(l_i)} m(x) dx, \quad (4.13)$$

где l_i - длина участка, на котором производится замена (рис. 4.8а).

Замена распределенной массы сосредоточенными может быть выполнена двумя способами (рис. 4.8а):

- распределенные массы разбиваются на участки и заменяются сосредоточенными массами, приложенными в центре тяжести каждого из участков;
- сосредоточенные массы в центрах тяжести каждого участка распределенной массы распределяются по закону рычага.

При дальнейшем расчете используется система со степенью свободы, равной степени свободы сосредоточенных масс.

Пример 4.3.1. Определить две первые собственные частоты колебаний простой балки с равномерно-распределенной массой (рис. 4.9).

Решение.

Заменяем распределенную массу четырьмя сосредоточенными массами (рис.4.9):

$$M_1 = \frac{ml}{6}; \quad M_2 = \frac{ml}{3}.$$

Полученная система имеет две степени свободы. Вычисляем удельные перемещения по правилу Верещагина, предварительно построив эпюры изгибающих моментов от $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$.

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{1}{EI} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{1}{EI} = \frac{4l^3}{243EI};$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} = & 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{1}{EI} + \\ & + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{l}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} l \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{l}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} l + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} l \right) \right] \frac{1}{EI} = \frac{7}{486} \cdot \frac{l^3}{EI}. \end{aligned}$$

Составляем вековое уравнение (уравнение частот) (3.9):

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{ml}{3} \cdot \frac{4}{243} \cdot \frac{l^3}{EI} - \frac{1}{\omega^2} \right); & \frac{ml}{3} \cdot \frac{7}{486} \cdot \frac{l^3}{EI} \\ \frac{ml}{3} \cdot \frac{7}{486} \cdot \frac{l^3}{EI}; & \left(\frac{ml}{3} \cdot \frac{4}{243} \cdot \frac{l^3}{EI} - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0$$

раскрывая которое получим:

$$\omega^2 = \frac{3 \cdot 486 \cdot EI}{(8 \pm 7)ml^4}; \quad \omega_1 = \frac{9,859}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{38,19}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Погрешность составляет: для основной собственной частоты – 0,107%, для второй частоты – 3,36%.

Если заменить распределенную массу тремя сосредоточенными массами – двумя на опорах $M_1 = \frac{ml}{4}$ и одной в пролете $M_2 = \frac{ml}{2}$, то получим систему с одной степенью свободы, для которой $\omega = \sqrt{\frac{48EI \cdot 2}{ml \cdot l^3}} = \frac{9,798}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$. Погрешность решения в этом случае составит 0,62%.

Пример 4.3.2. Определить самостоятельно две первые собственные частоты колебаний следующих систем (рис. 4.5, схемы «а», «б» и «в»), разбивая их на три участка в схемах «а» и «б» и на два участка в схеме «в».

Результаты решения:

$$\text{а) } \omega_1 = 22,05 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}; \quad \omega_2 = 51,22 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}};$$

$$\text{б) } \omega_1 = 15,35 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}; \quad \omega_2 = 39,05 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}};$$

$$\text{в) } \omega_1 = 3,16 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}; \quad \omega_2 = 16,26 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

4.4. Способ Данкерлея

Этот способ состоит в том, что обратная величина квадрата основной частоты собственных колебаний системы с « n » степенями свободы равна сумме обратных величин квадратов собственных частот, если систему каждый раз считать с одной степенью свободы, имеющей поочередно массы $M_1, M_2, \dots, M_n$, т.е.:

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum_{i=1}^n M_i \delta_{ii} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}. \quad (4.14)$$

При наличии распределенной массы $m(x)$, формула Данкерля принимает вид:

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum_{i=1}^n M_i \delta_{ii} + \int_0^l m(x) \delta_{xx} dx, \quad (4.15)$$

где δ_{xx} - перемещение точки, определяемое абсциссой x от единичной силы, приложенной в этой точке.

Пример 4.4.1. Определить основную собственную частоту колебаний простой балки с равномерно-распределенной массой (рис. 4.10).

Решение.

Определяем δ_{xx} , предварительно построив эпюру изгибающих моментов от силы $P_x = 1$ (рис.4.10).

$$\delta_{xx} = \left[\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x(l-x)}{l} \cdot \frac{2x(l-x)}{3} + \frac{1}{2} (l-x) \cdot \frac{x(l-x)}{l} \cdot \frac{2x \cdot (l-x)}{3l} \right] \frac{1}{EI} = \frac{x^2(l-x)^2}{3EI \cdot l}.$$

Вычислим интеграл, входящий в (4.15):

$$\int_0^l m \frac{x^2(l-x)^2}{3EI \cdot l} dx = \frac{m}{3EI \cdot l} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx = \frac{m}{3EI \cdot l} \cdot \frac{2l^5}{60} = \frac{ml^4}{90EI}.$$

Тогда:

$$\omega^2 = \frac{90EI}{ml^4}, \quad \omega = \frac{9,487}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Погрешность решения составляет 3,78%.

Пример 4.4.2. Определить основную собственную частоту колебаний простой балки с двумя сосредоточенными массами (рис. 4.3).

Решение.

Вычисляем $\delta_{11} = \delta_{22}$, предварительно построив эпюру изгибающих моментов от силы $P_1 = 1$:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{2}{9} l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} l \right] \frac{1}{EI} = \frac{4l^3}{243EI}.$$

Тогда: $\frac{1}{\omega^2} = M \frac{4l^3}{243 \cdot EI} + M \frac{4l^3}{243 \cdot EI} = \frac{8M \cdot l^3}{243 \cdot EI}$, $\omega = 5,512 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}$.

Погрешность решения 3,13%.

Пример 4.4.3. Определить самостоятельно основную собственную частоту колебаний следующих систем (рис. 4.4, 4.5).

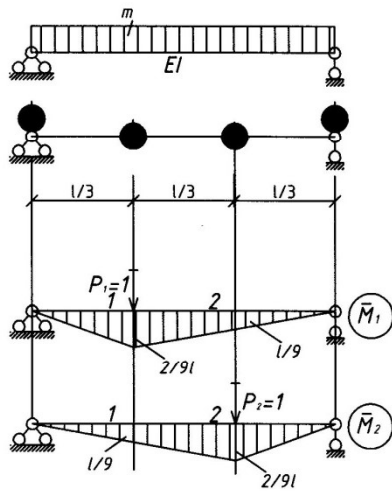
Результаты решения:

Рис. 4.4: $\omega = 2,013 \sqrt{\frac{EI}{Ml^4}}$;

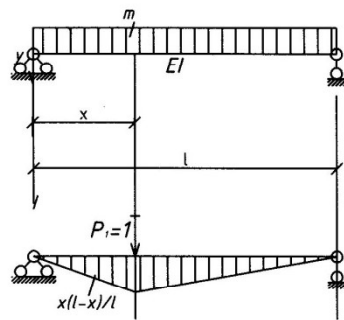
Рис. 4.5: а) $\omega = 20,49 \sqrt{\frac{EI}{Ml^4}}$; б) $\omega = 14,49 \sqrt{\frac{EI}{Ml^4}}$;;

в) $\omega = 3,46 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$; г) $\omega = 0,548 \sqrt{\frac{EI}{Ml^4}}$; д) $\omega = 0,485 \sqrt{\frac{EI}{Ml^4}}$.

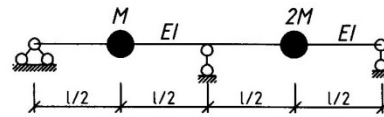
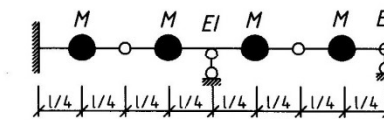
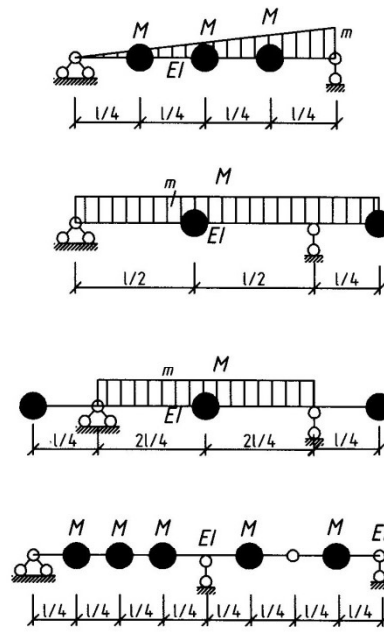
Пример 4.4.4. Используя приближенные способы, определить самостоятельно основную собственную частоту колебаний следующих систем, изображенных на рис. 4.8.б, 4.11, 4.12.



Puc. 4.9



Puc. 4.10



Puc. 4.11

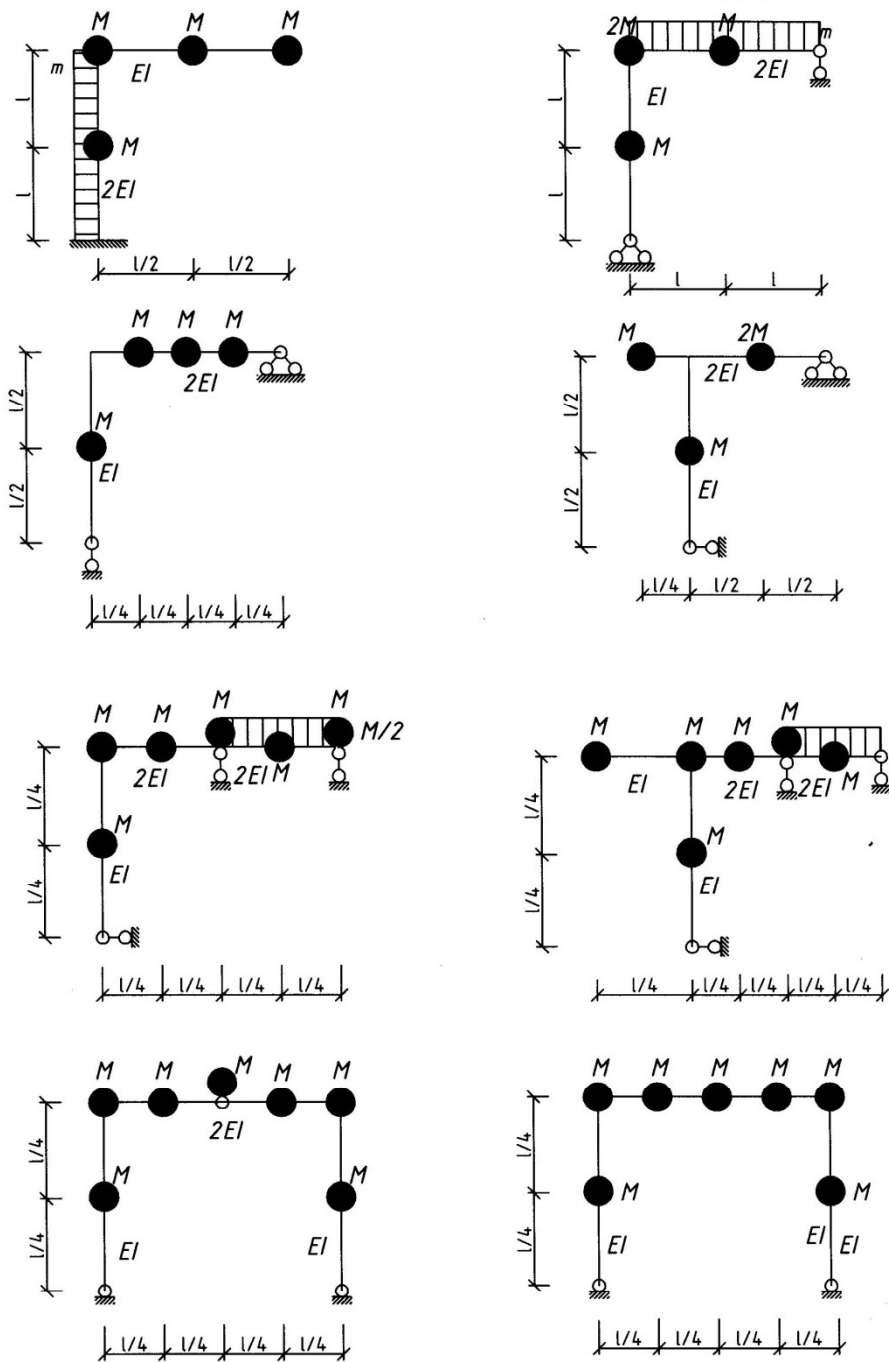


Рис. 4.12